



МИНИСТЕРСТВО
ОБРАЗОВАНИЯ
БЕЛГОРОДСКОЙ
ОБЛАСТИ

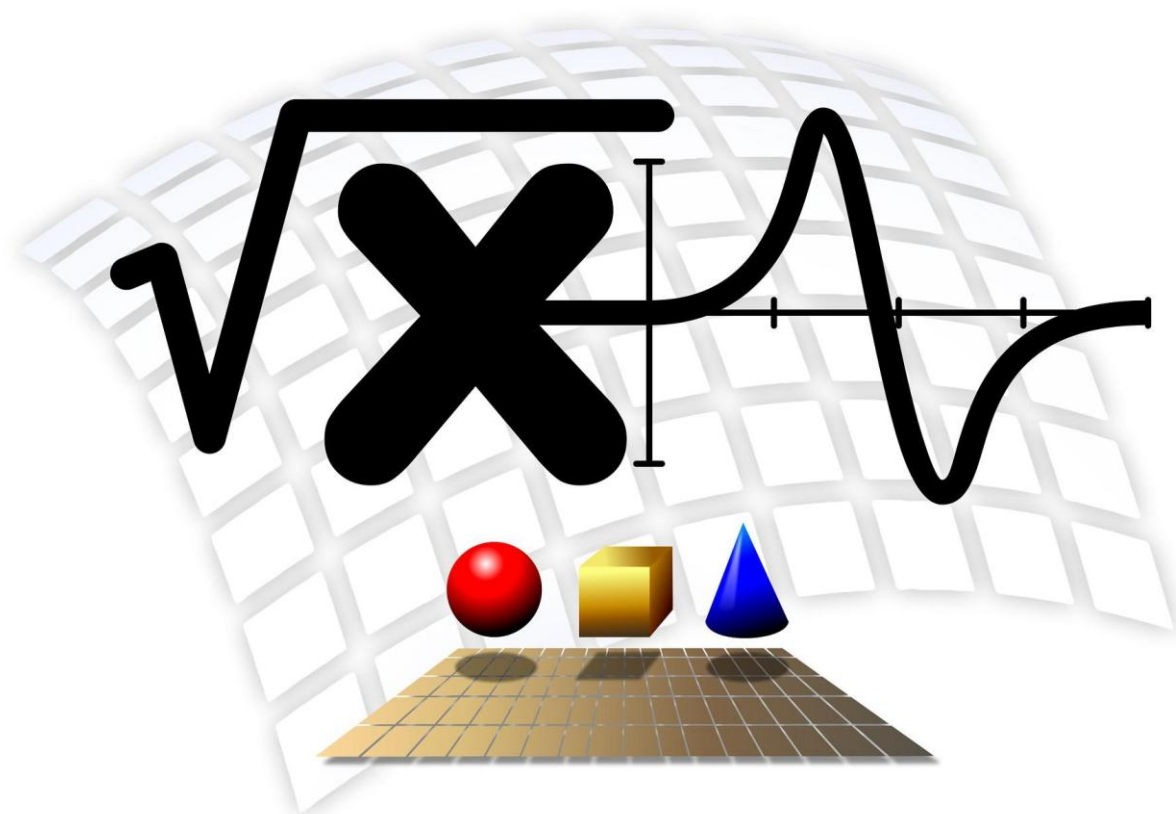


ОБЛАСТНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
АВТОНОМНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«РАКИТЯНСКИЙ АГРОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
ТЕХНИКУМ

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

для специальности среднего профессионального образования 35.02.08
Электротехнические системы в агропромышленном комплексе (АПК)

Учебное пособие



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ БЕЛГОРОДСКОЙ ОБЛАСТИ
ОБЛАСТНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«РАКИТЯНСКИЙ АГРОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ»

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

для специальности среднего профессионального образования
35.02.08 Электротехнические системы в агропромышленном
комплексе (АПК)

Учебное пособие

Электронное издание

пос. Ракитное 2025 г.

УДК 51
ББК 22.1

Рецензенты:

доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования
НИУ «БелГУ», кандидат физико-математических наук В.А. Полунин

Практикум по математике для специальности среднего профессионального образования 35.02.08 Электротехнические системы в агропромышленном комплексе (АПК): учебное пособие / составитель Н.В. Журавель. – п. Ракитное: ОГАПОУ «РАТТ», 2025. – 188 с., текст: электронный (символьный) URL: https://belratt.ru/uploads/file/Osnovnie_svedeniya/Metodicheskaya_kopilka/Agrokonkurs_GuravelNV.pdf

Учебное пособие «Практикум по математике для специальности среднего профессионального образования 35.02.08 Электротехнические системы в агропромышленном комплексе (АПК)» предназначено для обучающихся по очной форме обучения направлений подготовки для специальности среднего профессионального образования 35.02.08 Электротехнические системы в агропромышленном комплексе (АПК) как руководство к решению задач по общеобразовательной дисциплине «Математика» на практических занятиях и самостоятельно. В пособии приведены краткие теоретические сведения и решения типовых примеров по рассматриваемым темам. Задания, приведенные в учебном пособии, помогут обучающимся практически освоить общеобразовательную дисциплину «Математика» с наличием профессионально направленных задач. Пособие составлено в соответствии с существующими рабочими программами по дисциплине «Математика». Учебное пособие может быть использовано преподавателями при проведении практических занятий, организации самостоятельной работы обучающихся. Предоставленное учебное пособие содержательно, имеет практическую профессиональную направленность, включает достаточное количество разработанных элементов, направленных на развитие умственных, творческих способностей обучающихся, формирование общих компетенций. Электронное издание.

© Н.В. Журавель, составление, 2025

© ОГАПОУ «РАТТ», 2025

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ	4
Введение	7
Перечень практических работ	16
Раздел 1. Повторение курса математики основной школы	20
Практическая работа. Арифметические действия над числами	20
Практическая работа. Простые проценты, разные способы их вычисления	21
Практическая работа. Линейные, квадратные уравнения	23
Практическая работа. Простые и сложные проценты	26
Практическая работа. Процентные вычисления в профессиональных задачах	29
Практическая работа. Решение задач: нормирование и оплату труда	31
Практическая работа. Дробно-линейные уравнения и неравенства	37
Практическая работа. Геометрия на плоскости	39
Раздел 2. Корни, степени, логарифмы	40
Практическая работа. Вычисление и сравнение корней	40
Практическая работа. Степень с рациональным и действительным показателями	41
Практическая работа. Основные приемы решения уравнений	42
Практическая работа. Решение уравнений	44
Практическая работа. Решение показательных уравнений	46
Практическая работа. Система показательных уравнений	48
Практическая работа. Нахождение значений логарифма по произвольному основанию. ...	50
Практическая работа. Логарифмирование и потенцирование выражений	52
Практическая работа. Приближенные вычисления и решения прикладных задач	54
Практическая работа. Вычисление и сравнение логарифмов.	55
Практическая работа. Решение логарифмических уравнений	56
Практическая работа. Логарифмические функции в природе и технике	58
Практическая работа. Построение логарифмической спирали	60
Раздел 3. Прямые и плоскости в пространстве	61
Практическая работа. Угол между прямыми	61
Практическая работа. Тетраэдр	62
Практическая работа. Параллелепипед	63
Практическая работа. Решение задач на построение сечений	64
Практическая работа. Перпендикуляр и наклонная к плоскости	66
Практическая работа. Угол между прямой и плоскостью	67
Практическая работа. Признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей	68
Раздел 4. Комбинаторика	69
Практическая работа. Правило произведения. Перестановки	69
Практическая работа. Размещения	71

Практическая работа. Сочетания их свойства	72
Практическая работа. Решение комбинаторных задач	73
Раздел 5. Координаты и векторы	75
Практическая работа. Центральное проектирование	75
Практическая работа. Аксонометрические проекции плоских предметов	77
Практическая работа. Векторы. Действия с векторами	80
Практическая работа. Действия с векторами, заданными координатами	82
Практическая работа. Простейшие задачи в координатах	83
Практическая работа. Скалярное произведение векторов	84
Практическая работа. Уравнение плоскости	85
Раздел 6. Основы тригонометрии	86
Практическая работа. Радианный метод измерения углов и связь с градусной мерой	86
Практическая работа. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса числа	87
Практическая работа. Формулы приведения	89
Практическая работа. Область определения и множество значений	90
Практическая работа. Четность, нечетность, периодичность функций	91
Практическая работа. Свойства и графики синуса, косинуса, тангенса и котангенса	93
Практическая работа. Обратные тригонометрические функции	96
Практическая работа. Решения тригонометрических уравнений	98
Практическая работа. Решение уравнений, сводящихся к квадратным	99
Практическая работа. Решение уравнений первого порядка	100
Практическая работа. Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства	102
Раздел 7. Многогранники и круглые тела	103
Практическая работа. Призма	103
Практическая работа. Пирамида	104
Практическая работа. Усеченная пирамида	105
Практическая работа. Построение сечений куба	106
Практическая работа. Построение сечений призмы и пирамиды	107
Практическая работа. Решение задач на многогранники	108
Практическая работа. Сфера и шар	109
Практическая работа. Цилиндр	112
Практическая работа. Конус	114
Практическая работа. Формулы объема куба, прямоугольного параллелепипеда	115
Практическая работа. Формулы объема цилиндра	116
Практическая работа. Формулы объема наклонной призмы	117
Практическая работа. Формулы объема пирамиды, конуса	118
Практическая работа. Формулы объема шара и площади сферы	121
Практическая работа. Центральная и осевая симметрия	122
Практическая работа. Зеркальная симметрия и параллельный перенос	123

Практическая работа. Поиск симметрии в специальности	124
Практическая работа. Решение задач на многогранники, цилиндр, конус и шар	137
Практическая работа. Решение задач на нахождение объема многогранников	138
Практическая работа. Решение задач на нахождение объема тел вращения.....	140
Раздел 8. Начала математического анализа.....	141
Практическая работа. Числовая последовательность	141
Практическая работа. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	143
Практическая работа. Правила дифференцирования	144
Практическая работа. Уравнение касательной	145
Практическая работа. Производные некоторых элементарных функций.....	148
Практическая работа. Производная: механический и геометрический смысл производной	149
Практическая работа. Экстремумы функций.....	151
Практическая работа. Исследование функции с помощью производной	153
Практическая работа. Выпуклость графика функции, точки перегиба.....	155
Практическая работа. Нахождение наибольшего, наименьшего значения и экстремальных значений функции.....	157
Практическая работа. Применение производной при решении задач на оптимизацию.....	158
Практическая работа. Практические задачи, приводящие к исследованию линейной функции.....	161
Практическая работа. Использование свойства квадратичной функции при решении экстремальных задач.....	164
Раздел 9. Интеграл и его применение	165
Практическая работа. Правила нахождения первообразных.....	165
Практическая работа. Теорема Ньютона—Лейбница	167
Практическая работа. Вычисление интегралов.	168
Практическая работа. Применение интеграла к вычислению площадей.....	169
Раздел 10. Элементы теории вероятностей и математической статистики.....	171
Практическая работа. Комбинации событий. Противоположное событие.....	171
Практическая работа. Сложение вероятностей.....	173
Практическая работа. Статистическая вероятность	174
Практическая работа. Вычисление вероятностей. Прикладные задачи	176
Практическая работа. Данные, таблицы, графики.....	177
Практическая работа. Центральные тенденции	181
Практическая работа. Числовые характеристики дискретной случайной величины	183
Повторение	185
Практическая работа. Выражения и преобразования.....	185
Практическая работа. Уравнения и неравенства	187
Список используемой литературы	188

Введение

Данное учебное пособие предназначено для выполнения практических работ по учебной дисциплине Математика обучающимися среднего профессионального образования по специальности 35.02.08 Электротехнические системы в агропромышленном комплексе (АПК).

Практические занятия дополняют теоретический курс, позволяют лучше усвоить его, знакомят с фактическим материалом на практике.

В учебном пособии даны пояснения к выполнению практических работ. После каждой работы приведены задания для проверки знаний обучающихся.

Каждый обучающийся должен вести рабочую тетрадь, в которую заносятся:

1) наименование работы; 2) записывается цель работы и ее ход; 3) заключение по работе включает в себя вывода по работе и ответ на контрольные вопросы.

Все практические работы выполняются в учебных кабинетах техникума. После выполнения всех практических работ рабочая тетрадь подписывается преподавателем - руководителем работ и предъявляется при сдаче экзамена по учебной дисциплине Математика.

Материал по каждому занятию излагается в следующей последовательности: вначале кратко формулируется цель занятия, затем теоретическая часть, методические указания по проведению практической работы и задания практической части и в конце контрольные вопросы. Преподаватель принимает выполненную обучающимся практическую работу в индивидуальном порядке. Для сдачи экзамена, по окончании практических занятий, студент представляет надлежащим образом оформленную тетрадь.

Выполнение практических работ по учебной дисциплине Математика обеспечивает достижение обучающимися следующих результатов:

Код и наименование формируемых компетенций	Планируемые результаты освоения дисциплины	
	Общие	Дисциплинарные
ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности	В части трудового воспитания: ЛР 25 готовность к труду, осознание ценности мастерства, трудолюбие; ЛР 26 готовность к активной деятельности технологической и социальной направленности, способность инициировать, планировать и самостоятельно выполнять такую деятельность Овладение универсальными учебными познавательными действиями: а) базовые логические действия: МР 02 интерес к различным сферам профессиональной деятельности МР 04 выявлять закономерности и противоречия в рассматриваемых явлениях; МР 05 вносить коррективы в деятельность, оценивать соответствие результатов целям, оценивать риски последствий деятельности; МР 06 развивать креативное мышление при решении жизненных проблем б) базовые исследовательские	ПР 01 владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; ПР 06 умение решать текстовые задачи разных типов (в том числе на проценты, доли и части, на движение, работу, стоимость товаров и услуг, налоги, задачи из области управления личными и семейными финансами); составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов; ПР 14 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи,

Код и наименование формируемых компетенций	Планируемые результаты освоения дисциплины	
	Общие	Дисциплинарные
	действия: МР 12 выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу ее решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений, задавать параметры и критерии решения; МР 13 анализировать полученные в ходе решения задачи результаты, критически оценивать их достоверность, прогнозировать изменение в новых условиях; МР 17 уметь переносить знания в познавательную и практическую области жизнедеятельности; МР 18 уметь интегрировать знания из разных предметных областей; МР 19 выдвигать новые идеи, предлагать оригинальные подходы и решения	распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки
ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по правовой и финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде	В области духовно-нравственного воспитания: ЛР 13 сформированность нравственного сознания, этического поведения; - способность оценивать ситуацию и принимать осознанные решения, ориентируясь на морально-нравственные нормы и ценности; ЛР 15 осознание личного вклада в построение устойчивого будущего; ЛР 16 ответственное отношение к своим родителям и (или) другим членам семьи, созданию семьи на основе осознанного принятия ценностей семейной жизни в соответствии с традициями народов России Овладение универсальными регулятивными действиями: а) самоорганизация: МР 38 самостоятельно осуществлять познавательную деятельность, выявлять проблемы, ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях; МР 39 самостоятельно составлять план решения проблемы с учетом имеющихся ресурсов, собственных возможностей и предпочтений; МР 40 давать оценку новым ситуациям; МР 44 способствовать	ПР 01 владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; ПР 04 умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения; ПР 06 умение решать текстовые задачи разных

Код и наименование формируемых компетенций	Планируемые результаты освоения дисциплины	
	Общие	Дисциплинарные
	формированию и проявлению широкой эрудиции в разных областях знаний, постоянно повышать свой образовательный и культурный уровень; б) самоконтроль: МР 47 использовать приемы рефлексии для оценки ситуации, выбора верного решения; МР 48 уметь оценивать риски и своевременно принимать решения по их снижению; в) эмоциональный интеллект, предполагающий сформированность: в) эмоциональный интеллект, предполагающий сформированность: внутренней мотивации, включающей стремление к достижению цели и успеху, оптимизм, инициативность, умение действовать, исходя из своих возможностей; эмпатии, включающей способность понимать эмоциональное состояние других, учитывать его при осуществлении коммуникации, способность к сочувствию и сопереживанию; социальных навыков, включающих способность выстраивать отношения с другими людьми, заботиться, проявлять интерес и разрешать конфликты	типов (в том числе на проценты, доли и части, на движение, работу, стоимость товаров и услуг, налоги, задачи из области управления личными и семейными финансами); составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов; ПР 08 умение оперировать понятиями: случайный опыт и случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, комбинаторные факты и формулы при решении задач; оценивать вероятности реальных событий; знакомство со случайными величинами; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях; ПР 14 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки
ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста ОК 06. Проявлять	В области эстетического воспитания: ЛР 18 эстетическое отношение к миру, включая эстетику быта, научного и технического творчества, спорта, труда и общественных отношений; ЛР 19 способность воспринимать различные виды искусства, традиции и творчество своего и других	ПР 01 владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; ПР 02 умение оперировать

Код и наименование формируемых компетенций	Планируемые результаты освоения дисциплины	
	Общие	Дисциплинарные
гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных российских духовно-нравственных ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения	народов, ощущать эмоциональное воздействие искусства; ЛР 20 убежденность в значимости для личности и общества отечественного и мирового искусства, этнических культурных традиций и народного творчества; ЛР 21 готовность к самовыражению в разных видах искусства, стремление проявлять качества творческой личности; В части гражданского воспитания: ЛР 03 принятие традиционных национальных, общечеловеческих гуманистических и демократических ценностей; ЛР 04 готовность противостоять идеологии экстремизма, национализма, ксенофобии, дискриминации по социальным, религиозным, расовым, национальным признакам; ЛР 05 готовность вести совместную деятельность в интересах гражданского общества, участвовать в самоуправлении в общеобразовательной организации и детско-юношеских организациях; ЛР 06 умение взаимодействовать с социальными институтами в соответствии с их функциями и назначением; ЛР 07 готовность к гуманитарной и волонтерской деятельности; патриотического воспитания: ЛР 08 сформированность российской гражданской идентичности, патриотизма, уважения к своему народу, чувства ответственности перед Родиной, гордости за свой край, свою Родину, свой язык и культуру, прошлое и настоящее многонационального народа России; ЛР 09 ценностное отношение к государственным символам, историческому и природному наследию, памятникам, традициям народов России, достижениям России в науке, искусстве, спорте, технологиях и труде; ЛР 10 идейная убежденность, готовность к служению и защите Отечества, ответственность за его судьбу. Овладение универсальными	понятиями: степень числа, логарифм числа; умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений; ПР 03 умение оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы; ПР 04 умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения; ПР 05 умение оперировать понятиями: рациональная функция, показательная функция, степенная функция, логарифмическая функция, тригонометрические функции, обратные функции; умение строить графики изученных функций, использовать графики при изучении процессов и зависимостей, при решении задач из других учебных предметов и задач из реальной жизни; выражать

Код и наименование формируемых компетенций	Планируемые результаты освоения дисциплины	
	Общие	Дисциплинарные
	коммуникативными действиями: а) общение: МР 26 осуществлять коммуникации во всех сферах жизни; МР 27 распознавать невербальные средства общения, понимать значение социальных знаков, распознавать предпосылки конфликтных ситуаций и смягчать конфликты	формулами зависимости между величинами; ПР 06 умение решать текстовые задачи разных типов (в том числе на проценты, доли и части, на движение, работу, стоимость товаров и услуг, налоги, задачи из области управления личными и семейными финансами); составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов; ПР 07 умение оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение числового набора; умение извлекать, интерпретировать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, отражающую свойства реальных процессов и явлений; представлять информацию с помощью таблиц и диаграмм; исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств; ПР 08 умение оперировать понятиями: случайный опыт и случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, комбинаторные факты и формулы при решении задач; оценивать вероятности реальных событий; знакомство со случайными величинами; умение

Код и наименование формируемых компетенций	Планируемые результаты освоения дисциплины	
	Общие	Дисциплинарные
		приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях; ПР 9 умение оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, двугранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов окружающего мира; ПР 10 умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; умение распознавать симметрию в пространстве; умение распознавать правильные многогранники; ПР 11 умение оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве;

Код и наименование формируемых компетенций	Планируемые результаты освоения дисциплины	
	Общие	Дисциплинарные
		использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при решении задач; ПР 13 умение оперировать понятиями: прямоугольная система координат, координаты точки, вектор, координаты вектора, скалярное произведение, угол между векторами, сумма векторов, произведение вектора на число; находить с помощью изученных формул координаты середины отрезка, расстояние между двумя точками
ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках	В области экологического воспитания: ЛР 29 сформированность экологической культуры, понимание влияния социально-экономических процессов на состояние природной и социальной среды, осознание глобального характера экологических проблем; ЛР 30 планирование и осуществление действий в окружающей среде на основе знания целей устойчивого развития человечества; активное неприятие действий, приносящих вред окружающей среде; ЛР 32 умение прогнозировать неблагоприятные экологические последствия предпринимаемых действий, предотвращать их; ЛР 33 расширение опыта деятельности экологической направленности; В области ценности научного познания: ЛР 35 сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, основанного на диалоге культур, способствующего осознанию своего места в поликультурном мире; ЛР 36 совершенствование языковой и читательской культуры как средства взаимодействия между людьми и познания мира; ЛР 37 осознание ценности научной деятельности, готовность	ПР 01 владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; ПР 04 умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; умение находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения; ПР 06 умение решать текстовые задачи разных типов (в том числе на проценты, доли и части, на движение, работу, стоимость

Код и наименование формируемых компетенций	Планируемые результаты освоения дисциплины	
	Общие	Дисциплинарные
	осуществлять проектную и исследовательскую деятельность индивидуально и в группе Овладение универсальными учебными познавательными действиями: б) базовые исследовательские действия: МР 07 владеть навыками учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; МР 08 способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания; МР 09 овладение видами деятельности по получению нового знания, его интерпретации, преобразованию и применению в различных учебных ситуациях, в том числе при создании учебных и социальных проектов; МР 10 формирование научного типа мышления, владение научной терминологией, ключевыми понятиями и методами; МР 16 осуществлять целенаправленный поиск переноса средств и способов действия в профессиональную среду	товаров и услуг, налоги, задачи из области управления личными и семейными финансами); составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов; ПР 14 умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки

В рамках программы учебной дисциплины обучающимися осваивают **личностные результаты реализации программы воспитания (далее ЛРв):**

ЛРв 01 Осознающий себя гражданином и защитником великой страны;

ЛРв 02 Проявляющий активную гражданскую позицию, демонстрирующий приверженность принципам честности, порядочности, открытости, экономически активный и участвующий в студенческом и территориальном самоуправлении, в том числе на условиях добровольчества, продуктивно взаимодействующий и участвующий в деятельности общественных организаций;

ЛРв 03 Соблюдающий нормы правопорядка, следующий идеалам гражданского общества, обеспечения безопасности, прав и свобод граждан России. Лояльный к установкам и проявлениям представителей субкультур, отличающий их от групп с деструктивным и девиантным поведением. Демонстрирующий неприятие и предупреждающий социально опасное поведение окружающих;

ЛРв 04 Проявляющий и демонстрирующий уважение к людям труда, осознающий ценность собственного труда. Стремящийся к формированию в сетевой среде лично и профессионального конструктивного «цифрового следа»;

ЛРв 05 Демонстрирующий приверженность к родной культуре, исторической памяти на основе любви к Родине, родному народу, малой родине, принятию традиционных ценностей многонационального народа России;

ЛРв 06 Проявляющий уважение к людям старшего поколения и готовность к участию в социальной поддержке и волонтерских движениях;

ЛРв 07 Осознающий приоритетную ценность личности человека; уважающий собственную и чужую уникальность в различных ситуациях, во всех формах и видах деятельности;

ЛРв 08 Проявляющий и демонстрирующий уважение к представителям различных этнокультурных, социальных, конфессиональных и иных групп. Сопричастный к сохранению, преумножению и трансляции культурных традиций и ценностей многонационального российского государства;

ЛРв 09 Соблюдающий и пропагандирующий правила здорового и безопасного образа жизни, спорта; предупреждающий либо преодолевающий зависимости от алкоголя, табака, психоактивных веществ, азартных игр и т.д. Сохраняющий психологическую устойчивость в ситуативно сложных или стремительно меняющихся ситуациях;

ЛРв 10 Заботящийся о защите окружающей среды, собственной и чужой безопасности, в том числе цифровой;

ЛРв 11 Проявляющий уважение к эстетическим ценностям, обладающий основами эстетической культуры;

ЛРв 12 Принимающий семейные ценности, готовый к созданию семьи и воспитанию детей; демонстрирующий неприятие насилия в семье, ухода от родительской ответственности, отказа от отношений со своими детьми и их финансового содержания.

Перед началом выполнения каждой практической работы проводится опрос с целью проверки знаний и готовности студентов к выполнению работы и заданий к ним. Реализация программы дисциплины требует наличия учебного кабинета Математика со следующим инструментарием:

1. Оборудование:

- 1.1. Рабочее место преподавателя: 1.
- 1.2. Рабочие места обучающихся: 25.
- 1.3. Учебная документация.
- 1.4. Комплект плакатов (стендов) для оформления кабинета.
- 1.5. Комплект рисунков, схем, таблиц для демонстраций.
- 1.6. Учебные наглядные пособия и презентации по дисциплине (диски, плакаты, слайды, диафильмы).

1.7. Средства обучения для студентов:

- 1.7.1. учебники, учебные пособия; сборники упражнений;
- 1.7.2. руководство по выполнению практических заданий.
- 1.8. Учебно-методическая литература для преподавателя.
- 1.9. Электронные учебники.

2. Технические средства обучения:

- 2.1. Демонстрационный (мультимедийный) комплекс.
- 2.2. Дистанционное обучение в системе «РАТТ31».

Данный экземпляр учебного пособия представлен в электронном виде как электронный учебник (электронное издание) в pdf формате с автоматическим оглавлением¹, что позволяет использовать интерактив в виде ссылок на практические работы, а также обратного перехода на оглавление.

¹ Оглавление оформлено согласно учебнику указанном в п.13 Списка использованной литературы, который в перечне литературы согласно ФГОС нового поколения.

Перечень практических работ

Наименование практической работы	Количество часов
1 курс, 1 семестр	37
Раздел 1. Повторение курса математики основной школы	14
<i>Тема 1.1 Цель и задачи математики при освоении специальности. Числа и вычисления</i>	
Практическая работа. Арифметические действия над числами.	1
<i>Тема 1.2 Процентные вычисления. Уравнения и неравенства</i>	
Практическая работа. Простые проценты, разные способы их вычисления.	1
Практическая работа. Линейные, квадратные уравнения и неравенства.	2
<i>Тема 1.3 Процентные вычисления в профессиональных задачах</i>	
Практическая работа. Простые и сложные проценты.	2
Практическая работа. Процентные вычисления в профессиональных задачах.	2
<i>Тема 1.4 Решение задач. Входной контроль</i>	
Практическая работа. Решение задач: нормирование и оплату труда	2
Практическая работа. Дробно-линейные уравнения и неравенства.	2
Практическая работа. Геометрия на плоскости	2
Раздел 2. Корни, степени, логарифмы	18
<i>Тема 2.1 Степенная функция, ее свойства. Преобразование выражений с корнями n-ой степени</i>	
Практическая работа. Вычисление и сравнение корней.	1
Практическая работа. Степень с рациональным и действительным показателями.	2
<i>Тема 2.2 Решение иррациональных уравнений.</i>	
Практическая работа. Основные приемы решения уравнений.	1
Практическая работа. Решение уравнений.	2
<i>Тема 2.3 Показательная функция, ее свойства. Показательные уравнения и неравенства</i>	
Практическая работа. Решение показательных уравнений.	1
Практическая работа. Система показательных уравнений.	1
<i>Тема 2.4 Логарифм числа. Свойства логарифмов</i>	
Практическая работа. Нахождение значений логарифма по произвольному основанию.	1
Практическая работа. Логарифмирование и потенцирование выражений.	1
Практическая работа. Приближенные вычисления и решения прикладных задач.	1
<i>Тема 2.5 Логарифмическая функция, ее свойства. Логарифмические уравнения, неравенства</i>	
Практическая работа. Вычисление и сравнение логарифмов.	1
Практическая работа. Решение логарифмических уравнений.	2
<i>Тема 2.6 Логарифмы в природе и технике</i>	
Практическая работа. Логарифмические функции в природе и технике.	2
Практическая работа. Построение логарифмической спирали.	2
Раздел 3. Прямые и плоскости в пространстве	8
<i>Тема 3.1 Основные понятия стереометрии. Расположение прямых и плоскостей</i>	
Практическая работа. Угол между прямыми.	1
<i>Тема 3.2 Параллельность прямых, прямой и плоскости, плоскостей</i>	
Практическая работа. Тетраэдр.	1

Наименование практической работы	Количество часов
Практическая работа. Параллелепипед.	1
Практическая работа. Решение задач на построение сечений.	2
1 курс, 2 семестр	77
<i>Тема 3.3 Перпендикулярность прямых, прямой и плоскости, плоскостей</i>	
Практическая работа. Перпендикуляр и наклонная к плоскости.	1
<i>Тема 3.4 Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трех перпендикулярах</i>	
Практическая работа. Угол между прямой и плоскостью.	1
Практическая работа. Признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей.	1
Раздел 4. Комбинаторика	4
<i>Тема 4.1 Элементы комбинаторики</i>	
Практическая работа. Правило произведения. Перестановки.	1
Практическая работа. Размещения.	1
Практическая работа. Сочетания их свойства.	1
Практическая работа. Решение комбинаторных задач.	1
Раздел 5. Координаты и векторы	8
<i>Тема 5.1 Координаты и векторы в пространстве</i>	
Практическая работа. Векторы. Действия с векторами.	1
Практическая работа. Действия с векторами, заданными координатами.	1
Практическая работа. Скалярное произведение векторов.	1
Практическая работа. Уравнение плоскости.	1
<i>Тема 5.2 Прямые и плоскости в практических задачах</i>	
Практическая работа. Центральное проектирование.	2
Практическая работа. Аксонометрические проекции многогранных предметов.	2
Раздел 6. Основы тригонометрии	22
<i>Тема 6.1 Тригонометрические функции произвольного угла, числа</i>	
Практическая работа. Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой.	2
Практическая работа. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса числа.	2
<i>Тема 3.2 Основные тригонометрические тождества</i>	
Практическая работа. Формулы приведения.	2
<i>Тема 6.3 Тригонометрические функции, их свойства и графики</i>	
Практическая работа. Область определения и множество значений.	2
Практическая работа. Четность, нечетность, периодичность тригонометрических функций.	2
Практическая работа. Свойства и графики синуса, косинуса, тангенса и котангенса.	2
<i>Тема 6.4 Обратные тригонометрические функции</i>	
Практическая работа. Обратные тригонометрические функции.	2
<i>Тема 6.5 Тригонометрические уравнения и неравенства</i>	
Практическая работа. Решение тригонометрических уравнений.	2
Практическая работа. Решение уравнений, сводящихся к квадратным.	2
Практическая работа. Решение уравнений первого порядка.	2
Практическая работа. Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства.	2
Раздел 7. Многогранники и круглые тела	40
<i>Тема 7.1 Призма, параллелепипед, куб, пирамида и их сечения</i>	
Практическая работа. Призма.	2

Наименование практической работы	Количество часов
Практическая работа. Пирамида.	2
Практическая работа. Усеченная пирамида.	2
Практическая работа. Построение сечений куба	2
Практическая работа. Построение сечений призмы и пирамиды	2
Практическая работа. Решение задач на многогранники.	2
<i>Тема 7.2 Цилиндр, конус, шар и их сечения</i>	
Практическая работа. Сфера и шар.	2
Практическая работа. Цилиндр.	2
Практическая работа. Конус.	2
<i>Тема 7.3 Объемы и площади поверхностей тел</i>	
Практическая работа. Формулы объема куба, прямоугольного параллелепипеда.	2
Практическая работа. Формулы объема цилиндра.	2
Практическая работа. Формулы объема наклонной призмы.	2
Практическая работа. Формулы объема пирамиды, конуса.	2
Практическая работа. Формулы объема шара и площади сферы.	2
<i>Тема 7.4 Примеры симметрии в профессии</i>	
Практическая работа. Центральная и осевая симметрия.	2
Практическая работа. Зеркальная симметрия и параллельный перенос.	2
Практическая работа. Поиск симметрии в специальности	2
Практическая работа. Решение задач на многогранники, цилиндр, конус и шар.	2
<i>Тема 7.5 Решение задач. Многогранники и тела вращения</i>	
Практическая работа. Решение задач на нахождение объема многогранников.	2
Практическая работа. Решение задач на нахождение объема тел вращения.	2
2 курс, 1 семестр	56
Раздел 9. Начала математического анализа	26
<i>Тема 9.1 Понятие производной. Формулы и правила дифференцирования</i>	
Практическая работа. Числовая последовательность.	2
Практическая работа. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.	2
Практическая работа. Правила дифференцирования.	2
<i>Тема 9.2 Геометрический и физический смысл производной</i>	
Практическая работа. Уравнение касательной.	2
Практическая работа. Производные некоторых элементарных функций.	2
Практическая работа. Производная: механический и геометрический смысл производной.	2
<i>Тема 9.3 Монотонность функции. Точки экстремума</i>	
Практическая работа. Экстремумы функций.	2
<i>Тема 9.4 Исследование функций и построение графиков</i>	
Практическая работа. Исследование функции с помощью производной.	2
Практическая работа. Выпуклость графика функции, точки перегиба.	2
<i>Тема 9.5 Наибольшее и наименьшее значения функции</i>	
Практическая работа. Нахождение наибольшего, наименьшего значения.	2
<i>Тема 9.6 Нахождение оптимального результата с помощью производной в практических задачах</i>	
Практическая работа. Применение производной при решении задач на оптимизацию.	2
Практическая работа. Практические задачи, приводящие к исследованию линейной функции.	2
Практическая работа. Использование свойства квадратичной функции при решении экстремальных задач.	2

Наименование практической работы	Количество часов
Раздел 10. Интеграл и его применение	8
<i>Тема 10.1 Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона Лейбница</i>	
Практическая работа. Правила нахождения первообразных.	2
Практическая работа. Теорема Ньютона—Лейбница.	2
Практическая работа. Вычисление интегралов.	2
Практическая работ. Применение интеграла к вычислению площадей.	2
Раздел 11. Элементы теории вероятностей и математической статистики	14
<i>Тема 10.1 Событие, вероятность события. Сложение и умножение вероятностей</i>	
Практическая работа. Комбинации событий .Противоположное событие.	2
Практическая работа. Сложение вероятностей.	2
Практическая работа. Статистическая вероятность.	2
Практическая работа. Вычисление вероятностей. Прикладные задачи.	2
<i>Тема 11.2 Задачи математической статистики.</i>	
Практическая работа. Данные, таблицы, графики.	2
Практическая работа. Центральные тенденции.	2
<i>Тема 11.3 Дискретная случайная величина, закон ее распределения</i>	
Практическая работа. Числовые характеристики дискретной случайной величины.	2
Повторение	2
Практическая работа. Выражения и преобразования.	1
Практическая работа. Уравнения и неравенства.	1
Всего	170

Раздел 1. Повторение курса математики основной школы

Практическая работа. Арифметические действия над числами

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: повторить различные формы записи числа, переход от обыкновенной дроби к десятичной записи и наоборот.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

1. Перевод из десятичной дроби в обыкновенную рассмотрим на примерах:

$$0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}; \quad 0,(13) = \frac{13}{99}; \quad 0,(1234) = \frac{1234}{9999};$$

$$0,55(6) = 0,55 + 0,00(6) = \frac{55}{100} + \frac{6}{9 \cdot 100} = \frac{5 \cdot 11}{5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{11}{20} + \frac{1}{150} = \frac{15 \cdot 11}{15 \cdot 20} + \frac{2}{2 \cdot 150} = \frac{167}{300}.$$

2. Перевод из обыкновенной дроби в десятичную, производится простым делением числителя на знаменатель. Можно получить: конечную десятичную дробь $\left(\frac{2}{5} = 0,4\right)$;

бесконечную периодическую десятичную дробь $\left(\frac{2}{7} = 0,2857142857142857... = 0,(285714)\right)$;

бесконечную непериодическую дробь $\left(\frac{3}{13} = 0,2307692307692308...\right)$.

3. Для представления числа в стандартном виде необходимо перенести запятую в десятичной дроби с наличием числа единиц.

Например: $0,0000365 = 3,65 \cdot 10^{-5}$; $0,0025 = 2,5 \cdot 10^{-3}$; $5200000 = 5,2 \cdot 10^6$; $156000 = 1,56 \cdot 10^5$.

Практическая часть:

1. Найдите значение выражения $1: \left(a \cdot c - \frac{b}{a}\right)$ при $a = 1,5, b = \frac{4}{5}, c = \frac{2}{15}$.

2. Представьте обыкновенные дроби $\frac{4}{15}, \frac{7}{6}, \frac{11}{15}$ в виде десятичной периодической дроби.

3. Число 0,0000271 представьте в стандартном виде.

4. Представьте десятичную дробь $7,15(19)$ в виде обыкновенной дроби.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.
4. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Контрольные вопросы:

1. Всякое ли целое число является рациональным?
2. Является ли число $\sqrt{0,64}$ иррациональным?
3. Всегда ли сумма рациональных чисел является рациональным числом?
4. Может ли при сложении иррациональных чисел получиться рациональное число?

Практическая работа. Простые проценты, разные способы их вычисления

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение применять способы вычисления простых процентов.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Слово « процент » происходит от латинских слов procentum, что буквально означает «со ста». Процент = одна сотая часть числа.

Понимание процентов и умение выполнять процентные вычисления в настоящее время необходимы каждому человеку. Очень велико прикладное значение этой темы. Она затрагивает финансовую, демографическую, экологическую, социологическую и другие сферы.

Рассмотрим три основных типа задач на проценты.

1) Нахождение процента от числа

Чтобы найти проценты от числа, можно проценты представить в виде десятичной дроби и число умножить на полученную десятичную дробь.

Задача: Предприятие изготовило за квартал 500 насосов, из которых 60 % имели высшую категорию качества. Сколько насосов высшей категории качества изготовило предприятие?

Решение: Найдем 60 % от 500 (общее количество насосов).

$$60 \% = 0,6$$

$$500 \cdot 0,6 = 300 \text{ насосов высшей категории качества.}$$

Ответ: 300 насосов высшей категории качества.

2) Нахождение числа по его проценту Чтобы найти число по его процентам, можно проценты представить в виде десятичной дроби и данное число разделить на полученную десятичную дробь.

Задача: Ученик прочитал 138 страниц, что составляет 23 % числа всех страниц в книге. Сколько страниц в книге?

Решение:

Итак, нам неизвестно сколько всего страниц в книге. Но мы знаем, что часть, которую прочитал ученик (138 страниц) составляет 23 % от общего количества страниц в книге. Так как 138 стр. - это всего лишь часть, само количество страниц, естественно, будет больше 138. Это поможет нам при проверке.

$$138 : 23 \% = 138 : 0,23 = \frac{138 \cdot 100}{23} = 600 \text{ (стр.)}$$

Проверка: 600 138 (это означает, что 138 является частью 600).

Ответ: 600 (стр.) - общее количество страниц в книге.

3) Сколько процентов одно число составляет от другого.

Чтобы найти сколько процентов одно число составляет от другого можно одно число разделить на другое и полученное произведение умножить на 100.

Задача: Из 200 арбузов 16 оказались незрелыми. Сколько процентов всех арбузов составили незрелые арбузы?

Решение:

16 делим на общее количество арбузов и умножаем на 100 %.

$$(16 : 200) \cdot 100\% = \frac{16}{200} \cdot 100\% = \frac{2}{25} \cdot 100\% = \frac{200\%}{25} = 8\%$$

Ответ: 8 % - составляют незрелые арбузы от всех арбузов.

Примеры решения задач

Задача 1: Для приготовления фарша взяли говядину и свинину в отношении 7:13. Какой процент в фарше составляет свинина?

Решение: Пусть взяли $7x$ г говядины, тогда свинины взяли $13x$ г. Следовательно, свинина составляет в фарше $\frac{13x}{7x+13x} \cdot 100\% = 65\%$. Ответ: 65 % .

Задача 2: Яблоки при сушке теряют 84% своей массы. Сколько сушеных яблок получится из 300 кг свежих?

Решение: Из условия следует, что при сушке теряется $300 \cdot 0,84 = 252$ кг.
 $300 - 252 = 48$ кг. Ответ: 48 кг.

Задача 3: Цена товара понизилась на 40%, затем еще на 25%. На сколько процентов понизилась цена товара по сравнению с первоначальной ценой?

Решение:

Обозначим первоначальную цену товара через x . После первого понижения цена станет равной

$$x - 0,4x = 0,6x.$$

Второе понижение цены составляет 25% от новой цены $0,6x$, поэтому после второго понижения будем иметь цену

$$0,6x - 0,25 \cdot 0,6x = 0,45x;.$$

После двух понижений суммарное изменение цены составляет:

$$x - 0,45x = 0,55x.$$

Так как величина $0,55x$; составляет 55% от величины x , то цена товара понизилась на 55%.

Ответ: 55%.

Практическая часть:

1. За пропуски занятий студенту уменьшили стипендию на 12%. Сколько ему достанется, если стипендия 800 рублей?
2. В магазине мультиварка продается со скидкой 20% за 4500 рублей. Какова первоначальная цена мультиварки?
3. Грибы при сушке теряют 78% своей массы. Сколько сушеных грибов получится из 100 кг свежих?
4. Какова величина подоходного налога, который составляет 13% от величины заработной платы в 21000 рублей?
5. В декабре шуба стоила 38 тыс. рублей, в сезон цену повысили на 20%, а в мае снизили на 15%, в июле была распродажа со скидкой 30%. Сколько теперь стоит шуба?

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.
4. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Контрольные вопросы:

1. Для чего необходимо решать задачи на проценты?
2. Какие существуют типы задач на проценты?

Практическая работа. Линейные, квадратные уравнения

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решать линейные и квадратные уравнения с помощью теоремы Виетта.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Необходимость решать уравнения не только первой, но и второй степени ещё в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков и с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики.

Определение

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c - действительные числа, причем $a \neq 0$, называют квадратным уравнением.

Если $a = 1$, то квадратное уравнение называют приведенным; если $a \neq 1$, то неприведенным.

Числа a, b, c носят следующие названия: a - первый коэффициент, b - второй коэффициент, c - свободный член.

Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ находят по формуле $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом* квадратного уравнения.

- если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней;
- если $D = 0$, то уравнение имеет один действительный корень;
- если $D > 0$, то уравнение имеет два действительных корня.

В случае, когда $D = 0$, иногда говорят, что квадратное уравнение имеет два одинаковых корня.

Пример

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 25 + 24 = 49$$

$$D > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = -3, x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ответ: } -3; 0,5$$

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ второй коэффициент b или свободный член c равен нулю, то квадратное уравнение называется неполным.

Неполные уравнения выделяют потому, что для отыскания их корней можно не пользоваться формулой корней квадратного уравнения - проще решить уравнение методом разложения его левой части на множители.

Способы решения неполных квадратных уравнений:

1. $c = 0$, то уравнение примет вид $ax^2 + bx = 0$.

$$x(ax + b) = 0,$$

$$x = 0 \text{ или } ax + b = 0, x = -b : a.$$

$$2. \quad b = 0, \text{ то уравнение примет вид}$$

$$ax^2 + c = 0,$$

$$x^2 = -c / a,$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{(-c / a)}.$$

$$3. \quad b = 0 \text{ и } c = 0, \text{ то уравнение примет вид}$$

$$ax^2 = 0,$$

$$x = 0$$

Пример.

$$(2x+1)(x-3) + (1-x)(x-5) = 29 - 11x$$

$$2x^2 - 5x - 3 - 6x + 5 + x^2 + 11x = 29$$

$$3x^2 = 27$$

$$x^2 = 9$$

$$x_1 = 3, x_2 = -3$$

$$\text{Ответ: } \pm 3$$

Теорема Виета

Зависимость между корнями и коэффициентами квадратного уравнения выражает теорема Виета.

Пусть x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, тогда $x_1 + x_2 = -b/a$, $x_1x_2 = c/a$.

Для приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, если x_1 и x_2 – корни этого уравнения, то $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$.

Справедливо утверждение, обратное теореме Виета: если числа m и n таковы, что их сумма равна $-p$, а произведение равно q , то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Существуют различные **приёмы решения систем уравнений**.

Метод подстановки заключается в следующем:

- Одно из уравнений системы преобразуют к виду, в котором y выражено через x (или x через y);
- Полученное выражение подставляют вместо y (или вместо x) во второе уравнение. В результате получается уравнение с одной переменной;
- Находят корни этого уравнения;
- Воспользовавшись выражением y через x (или x через y), находят соответствующие значения x (или y).

Метод сложения основан на следующих теоремах:

- Пусть дана система двух уравнений с двумя переменными. Если одно уравнение системы оставить без изменения, а другое уравнение системы заменить уравнением, ему равносильным, то полученная система будет равносильна заданной;
- Пусть дана система двух уравнений с двумя переменными. Если одно уравнение системы оставить без изменения, а другое уравнение заменить суммой или разностью обоих уравнений системы, то полученная система будет равносильна заданной.

Метод введения новых переменных применяется при решении систем двух уравнений с двумя переменными одним из следующих способов:

1. Вводится одна новая переменная только для одного уравнения системы;
2. Вводятся две новые переменные сразу для обоих уравнений.

Для того чтобы графически решить систему двух уравнений с двумя переменными, нужно в одной системе координат построить графики уравнений и найти координаты точек пересечения этих графиков.

Практическая часть:

Задание 1.

1) Решить уравнения:

а) $x^2 = 11$;

б) $x^2 = -8$;

в) $7x + 2 = 0$;

г) $x^2 - 5x = 0$.

2) Составить квадратное уравнение имеющее корни

- 3 и -3
- 0 и 6

Задание 2.

Решить приведенное квадратное уравнение с помощью теоремы Виета.

1. $x^2 - 7x + 10 = 0$; 6. $x^2 + 8x + 15 = 0$; 11. $x^2 - x - 6 = 0$; 16. $x^2 + 3x - 10 = 0$;

2. $x^2 - 6x + 8 = 0$; 7. $x^2 + 10x + 21 = 0$; 12. $x^2 - 2x - 8 = 0$; 17. $x^2 + 5x - 14 = 0$;

3. $x^2 - 8x + 12 = 0$; 8. $x^2 + 20x + 99 = 0$; 13. $x^2 - 4x - 12 = 0$; 18. $x^2 + x - 20 = 0$;

4. $x^2 - 9x + 20 = 0$; 9. $x^2 + 9x + 14 = 0$; 14. $x^2 - 6x - 16 = 0$; 19. $x^2 + 2x - 24 = 0$;

5. $x^2 - 10x + 25 = 0$; 10. $x^2 + 10x + 24 = 0$; 15. $x^2 - 7x - 30 = 0$; 20. $x^2 + x - 30 = 0$;

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.
4. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Контрольные вопросы:

1. Что означает коэффициент b в полном квадратном уравнении?
2. Что означает коэффициент c в полном квадратном уравнении?

Практическая работа. Простые и сложные проценты

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение применять способы вычисления простых и сложных процентов.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Процентными деньгами или **процентами** называют суммы, которые уплачивают за пользование денежными средствами.

Отношение процентных денег, полученных за единицу времени, к величине капитала называют **процентной ставкой** или таксой.

Проценты делятся на **простые**, которые вычисляются за весь срок обязательства на первоначальную сумму и **сложные**, база для начисления которых постоянно меняется за счёт присоединения ранее начисленных процентов.

Для перехода к практической части необходимо изучить примеры решения задач и по их примеру решить задачи представленные в практической части.

Расчеты по правилу простых процентов.

Задача 1.

Банк выдал ссуду в 10 млн. руб. на 2 года под 10% годовых. Определить подлежащую возврату сумму, если **простой процент** начислялся каждый год, а долг гасится единовременным платежом.

Дано:

$PV=10$ млн. руб.

$n = 2$ года

$i = 10\% = 0,1$

FV -?

где PV - настоящая стоимость денег,

FV - наращенная (будущая стоимость денег),

n - число периодов, за которое начисляется процент,

i - ставка процентов за период.

Решение:

$FV = PV(1 + n \cdot i)$

$FV = 10(1 + 2 \cdot 0,1) = 10 \cdot 1,2 = 12$ млн. руб.

Задача 2.

Организации предоставлена ссуда 100 млн. руб. под 10% годовых с 01.01. по 01.04.2011. Определить подлежащую возврату сумму.

Дано:

$PV=100$ млн.руб.

$i=10\%$ годовых

$t=90$ дн.

$y=360$ дн.

FV -?

t - период, на который были выданы деньги внутри года.

y - годовой период.

t и y измеряются в днях или кварталах.

Решение:

$n = t/y$

$n = 90/360 = 1/4$

$FV = 100(1 + 1/4 \cdot 0,1) = 100(1,025) = 102,5$ млн. руб.

Расчеты по правилу сложных процентов.

Расчёты по правилу **сложных процентов** называют **начислением процентов на процент**, а процедуру присоединения начисленных процентов **реинвестированием** или **капитализацией**.

Расчёты сложных процентов проводят при начислении процентов по вкладу, суммы задолженностей, определение арендной платы, при лизинговом обслуживании, определении изменения стоимости денег под влиянием инфляции.

Задача 3.

Ссуда 2 млн. руб. выдана под сложные проценты на 3 года. Проценты (100% годовых) исчисляются ежегодно и присоединяются к основной сумме долга. Определить сумму задолженности к погашению.

Дано:

$PV=2$ млн. руб.

$i=100\%$ годовых

$n=3$ года.

$FV=?$

Решение:

$$FV = PV(1+i)^n$$

$$FV = 2(1+1)^3 = 16 \text{ млн. руб.}$$

Наращенная сумма для сложных процентов определяется **по таблицам $(1+i)^n$** , где i указывается в процентах.

$(1+i)^n$ - мультиплицирующий множитель.

Пример использования таблицы:

при $i=10\%$

$$FV = 2 * 1,331 = 2,662 \text{ млн. руб.}$$

Если капитализация осуществляется несколько раз в год, то применяется следующая формула:

$$FV = PV(1+j/m)^{m*n},$$

где m - число раз начисления процентов в году,

j - номинальная ставка,

j/m - ставка за период,

n - число периодов.

Задача 4.

Пусть во вклад с капитализацией процентов помещено 10 млн. руб. Определить наращенную сумму вклада через 2 года, если проценты начисляют ежеквартально из расчёта 80% годовых.

Дано:

$PV=10$ млн. руб.

$j=80\%$ годовых

$n=2$ года

$m=4$

$FV=?$

Решение:

$$FV = 10(1+0,8/4)^{4*2} = 10(1+0,2)^8 = 43 \text{ млн.руб.}$$

Изменим условие задачи.

При $j=20\%$

$FV=10(1+0,2/4)^8=10(1+0,05)^8=10*1,477=14,77$ млн. руб.

Задача 5.

По карточке ежеквартально начисляются и присоединяются проценты, исходя из 9% годовых. Определить, какой суммой будет располагать владелец карточки через 7 месяцев, если она оформлена на 500 у.е.

Дано:

$PV=500$ у.е.

$j=9\%$

$m=4$

$t=7$ мес.

$y=12$ мес.

FV -?

Решение:

$n = t/y$

$n = 7/12$

$FV=500(1+0,09/4)^{4*7/12}=500(1+0,0225)^{2,33}=500(1+0,0225)^2=522,7$ у.е.

Если проценты начисляются только за полный процентный период, а за семь месяцев прошло два полных процентных периода, то 0,33 в степени следует отбросить.

Практическая часть:

Задача 1.

Банк выдал ссуду в 9 млн. руб. на 3 года под 15% годовых. Определить подлежащую возврату сумму, если **простой процент** начислялся каждый год, а долг гасится единовременным платежом.

Задача 2.

Организации предоставлена ссуда 150 млн. руб. под 20% годовых с 01.09. по 01.12.2023. Определить подлежащую возврату сумму.

Задача 3.

Ссуда 4 млн. руб. выдана под сложные проценты на 2 года. Проценты (100% годовых) исчисляются ежегодно и присоединяются к основной сумме долга. Определить сумму задолженности к погашению.

Задача 4.

Пусть во вклад с капитализацией процентов помещено 5 млн. руб. Определить наращенную сумму вклада через 3 года, если проценты начисляют ежеквартально из расчёта 60% годовых.

Задача 5.

По карточке ежеквартально начисляются и присоединяются проценты, исходя из 12% годовых. Определить, какой суммой будет располагать владелец карточки через 6 месяцев, если она оформлена на 400 у.е.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.
4. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Процентные вычисления в профессиональных задачах

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение применять процентные вычисления в профессиональных задачах процентов.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Теоретический материал находится в [практической работе: «Простые и сложные проценты»](#).

Пример для решения задачи №7. В цехе завода установлено 120 станков. Режим работы цеха 2-ух сменный. Продолжительность смены 8 часов. Годовой объем выпуска продукции 960 тыс. изделий, производственная мощность цеха 1100 тыс. изделий. Определите коэффициенты сменности работы станков, коэффициенты экстенсивной, интенсивной и интегральной загрузки. Известно, что в первую смену работают 100 станков, во вторую смену 90 станков. Количество рабочих дней в году- 250, время фактической работы 1 станка за год 3150 часов.

Решение:

Рассчитаем коэффициент сменности работы станков ($K_{см}$), как отношение фактически отработанного числа станкосмен за период к максимально возможному числу станкосмен на установленном оборудовании за одну смену того же периода:

$$K_{см} = \frac{\sum N_i}{n}$$

где

N_i – число станкосмен в i -ю смену, при этом суммирование ведётся по всем сменам данного периода;

n – максимально возможное число станкосмен на установленном оборудовании за одну смену того же периода.

$$K_{см} = \frac{N_1 + N_2}{n} = \frac{100 + 90}{120} = 1,58(3)$$

Коэффициент экстенсивного использования оборудования ($K_{экст}$) рассчитывается как отношение фактического количества часов работы оборудования к количеству часов его работы по плану (нормативу):

$$K_{экст} = \frac{T_{об.ф}}{T_{об.пл}} = \frac{T_{об.ф}}{D_{раб} \times K_{см.пл} \times t_{см}} = \frac{3150}{250 \times 2 \times 8} = \frac{3150}{4000} = 0,7875$$

где

$T_{об.ф}$ и $T_{об.пл}$ – соответственно фактическое и плановое время работы оборудования, $t_{см}$ – продолжительность смены.

Коэффициент интенсивности использования оборудования рассчитывается по формуле:

$$K_{инт} = \frac{B_{ф}}{B_{н}} = \frac{960}{1100} = 0,873$$

$B_{ф}$ – фактическая выработка оборудованием продукции в единицу времени;

$B_{н}$ – технически обоснованная нормативная выработка оборудованием продукции в единицу времени (паспортные данные оборудования).

Определим показатель, объединяющий экстенсивные и интенсивные резервы. Таким обобщающим показателем служит интегральный коэффициент использования оборудования, который характеризует использование оборудования, как по времени, так и по мощности.

$$K_{и} = K_{экст} \times K_{инт} = 0,7875 \times 0,873 = 0,687$$

В результате вычислений можно сделать вывод, что на предприятии имеются резервы для увеличения производительности оборудования и неиспользованные резервы времени.

Практическая часть:

Решите задачи:

1. В двух канистрах находится 90 л бензина. Если из первой канистры перелить во вторую 10% бензина, находящегося в первой канистре, то в обеих канистрах станет поровну. Вычислите, сколько литров бензина было в каждой канистре.
2. Кровельный материал необходимо приобретать с расчетом на «нахлест», составляющий 2% от общей площади. Найдите, сколько листов кровельного материала понадобится для кровли крыши гаража площадью 120 м², если 1 лист имеет площадь 2,5 м².
3. Из 4000 тонн нефти получили 30% керосина. Найдите, сколько тонн керосина получилось.
4. На «Газпром» приходится 20% мировой и 80% российской добычи газа. В 2006 году входящие в состав холдинга предприятия добыли 556 миллиардов голубого топлива. Сделайте оценку объемов мировой добычи газа и количества газа добываемого в России.
5. Для приготовления асфальта берётся 43,06% щебня, 40,19% песка дроблёного, 4,78 % песка природного, 4,31% битума, 7,66% минерального порошка. Вычислите, сколько нужно взять каждого вещества, чтобы сварить 15 тонн асфальта.
6. Машинистка должна была выполнить работу в определенный срок, ежедневно печатая определенное количество листов. Она рассчитала, что если будет печатать ежедневно на 2 листа больше установленной нормы, то окончит работу раньше намеченного срока на 2 дня, если же будет печатать на 60% больше нормы, то закончив работу на 4 дня раньше срока, напечатает на 8 листов больше намеченной работы. Найдите, сколько листов она должна была печатать в день и в какой срок окончить работу.
7. В цехе предприятия установлено 18 станков. Режим работы цеха двусменный, продолжительность смены – 8 ч. Годовой объем выпуска продукции – 140 тыс. изделий, производственная мощность цеха – 160 тыс.изделий. В первую смену работают все станки, во вторую – 50% всего станочного парка. Количество рабочих дней в году – 260, время фактической работы станка – 4000 ч в год. Определите коэффициент сменности, коэффициенты экстенсивной, интенсивной и интегральной нагрузки оборудования цеха.
8. Советская промышленность за годы войны изготовила около 30 тыс.боевых машин «Катюша». В ходе Берлинской операции было задействовано 5 % этих машин. Определите, сколько «Катюш» участвовало в Берлинской операции.
9. Немецкое командование на курской дуге бросило в бой до 2770 танков. С нашей стороны их ждали 3500 танков. Около 70% наших танков составляли Т-34. Определите, сколько Т-34 участвовали в битве.
10. В ходе оборонительного сражения на Курской дуге советские летчики потеряли 480 самолетов, что составляло 30% потери немцев. Вычислите, чему равна общая потеря самолетов.

Порядок выполнения работы:

1. Выполнение задания практической части.
2. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Решение задач: нормирование и оплату труда

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться применять вычислительные способности при решении задач по нормированию и оплате труда.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Для перехода к практической части необходимо изучить примеры решения задач и по их примеру решить задачи представленные в практической части.

Решение задач (Расчет заработной платы на предприятии для разных категорий работников)

Вариант 1

Задача 1. Сборщик 5 разряда затягивает за час 1,5 пары обуви. Часовая тарифная ставка – 116,82 руб. Определить сдельную расценку за пару обуви.

Дано:

$N_{\text{выр}} = 1,5$ пары

$T_{\text{ст}} = 116,82$ руб, **Найти:** $P_{\text{сд}}$ - ?

Решение

1. Норма выработки рабочего за час – 1,5 пары.

2. Сдельная расценка за единицу продукции $P_{\text{сд}} = T_{\text{ст}} / N_{\text{выр}}$,

где: $P_{\text{сд}}$ – сдельная расценка за единицу продукции,

$T_{\text{ст}}$ – часовая тарифная ставка, руб,

$N_{\text{выр}}$ – норма выработки рабочего за час, $P_{\text{сд}} = 116,82 / 1,5 = 77,9$ руб/пар

Задача 2. Бригада из 6 человек изготавливает за смену 8 пар обуви. Бригадная сдельная расценка 712,2 руб. Определить сдельный заработок бригады и каждого работника при условии, что все работники бригады имеют одинаковый разряд.

Дано:

$N = 8$ пар

$P_{\text{сд.бр}} = 712,2$ руб,

$n = 6$ чел **Найти:** $З_{\text{сд.бр}}$ - ? $З_{\text{сд.раб}}$ - ?

Решение

1. Бригадная сдельная расценка $P_{\text{сд.бр}} = 712,2$ руб

2. Сдельный заработок бригады:

$$З_{\text{сд.бр.}} = N * P_{\text{сд.бр}} = 8 * 712,2 = 5697,6 \text{ руб/смену}$$

3. Сдельный заработок рабочего:

$$З_{\text{сд.раб}} = З_{\text{сд.бр.}} : n = 5697,6 : 6 = 949,6 \text{ руб/смену.}$$

Задача 3. Определить: 1) Сдельную заработную плату членов бригады; 2) Общий заработок каждого члена бригады с учетом премиальных. Размер премии равняется 30000руб. Данные для расчета представленные в таблице.

Ф.И.О. работника	Разряд	Часовая тарифная ставка, $T_{\text{ст}}$	Отработанные часы	Коэффициент трудового участия
1) Иванов В.П.	V	80,2	170	1.0
2) Петров П.Т.	IV	72,1	175	0.8
3) Сидоров А.Ю.	III	64,75	170	1.2
4) Кузькин П.А.	I	42,4	160	1.1

Дано:

Пр = 30000руб. Найти: Зсд.бр.? Зчл.?

Решение

1. Определяем сдельную заработную плату каждого из членов бригады

$$З_{сд} = T_{ст.} * t,$$

где: $Z_{сд}$ - сдельная заработная плата членов бригады, руб

$T_{ст}$ – часовая тарифная ставка, руб

t – отработанные часы каждым членом бригады.

$$З_{сд. 1} = 80,2 \times 170 = 13634 \text{ (руб.)}$$

$$З_{сд. 2} = 72,1 \times 175 = 12617,5 \text{ (руб.)}$$

$$З_{сд. 3} = 64,75 \times 170 = 11007,5 \text{ (руб.)}$$

$$З_{сд. 4} = 42,4 \times 160 = 6784 \text{ (руб.)}$$

2. Определяем сумму коэффициента трудового участия (КТУ):

$$КТУ_{общ} = КТУ_1 + КТУ_2 + КТУ_3 + КТУ_4,$$

где: $КТУ_{общ}$ - сумма коэффициента трудового участия,

$КТУ_1$ – коэффициент трудового участия Иванова В.П. и т.д.

$$КТУ_{общ} = 1 + 0,8 + 1,2 + 1,1 = 4,1$$

3. Определяем цену одного КТУ

$$КТУ_{ср} = П_p : КТУ_{общ},$$

где: $КТУ_{ср}$ - цену одного КТУ,

$П_p$ – премия, руб

$$КТУ_{ср} = 30000 : 4,1 = 7317,07 \text{ (руб.)}$$

4. Определяем зарплату каждого члена бригады с учетом премии

$$З_{чл} = КТУ_{ср} * КТУ_{п} + З_{сд. п}$$

$$З_{чл. 1} = 7317,07 \times 1,0 + 13634 = 20951,07 \text{ (руб.)}$$

$$З_{чл. 2} = 7317,07 \times 0,8 + 12617,5 = 18471,16 \text{ (руб.)}$$

$$З_{чл. 3} = 7317,07 \times 1,2 + 11007,5 = 19787,98 \text{ (руб.)}$$

$$З_{чл. 4} = 7317,07 \times 1,1 + 6784 = 14832,78 \text{ (руб.)}$$

Задача 4. Тарифная ставка рабочего V разряда составляет 88,5 руб./ч. Продолжительность рабочего дня – 8 ч. Количество рабочих дней в месяце – 24. Норма выработки – 15 пар в смену. Фактическая выработка за месяц – 400 пар.

Рассчитайте заработную плату рабочего за месяц:

а) при простой повременной системе оплаты труда;

б) повременно-премиальной системе оплаты труда (премия составляет 10 % от тарифа);

в) прямой сдельной оплате труда (расценка за одну пару – 50,0 руб.);

г) сдельно-премиальной системе оплаты труда (премия – 0,5 % от сдельного заработка за каждый процент превышения нормы выработки);

д) сдельно-прогрессивной системе оплаты труда (повышающий коэффициент – 1,8).

Дано:

$$T_{ст. V} = 88,5 \text{ руб/ч,}$$

$$T_{см} = 8 \text{ час.}$$

$$Д_{раб} = 24 \text{ дня.}$$

$$Н_{выр.} = 15 \text{ пар.}$$

$$В_{фак} = 400 \text{ пар.}$$

Найти: Зраб?

Решение

а) Рассчитаем заработную плату рабочего за месяц при **простой повременной** системе оплаты труда:

$$З_{раб.а} = T_{ст} * T_{см} * Д_{раб},$$

где: $T_{\text{ст}}$ – часовая тарифная ставка, руб
 $T_{\text{см}}$ – продолжительность смены, час
 $D_{\text{раб}}$ – количество рабочих дней в месяце.
 $Z_{\text{раб.а}} = 88,5 * 8 * 24 = 16992 \text{ руб.};$

б) Рассчитаем заработную плату рабочего за месяц при повременно-премиальной системе оплаты труда:

$$Z_{\text{раб.б}} = Z_{\text{раб.а}} + П$$

где: $П$ – премия 10 % от тарифа, %
 $Z_{\text{раб.б}} = 16992 + 1699,2 = 18691,2 \text{ руб.};$

в) Рассчитаем заработную плату рабочего за месяц при прямой сдельной оплате труда:

$$Z_{\text{раб.в}} = P * V_{\text{ф}}$$

где: P – расценка за одну пару, 50,0 руб,
 $V_{\text{ф}}$ – фактическая выработка за месяц, пар.
 $Z_{\text{раб.в}} = 50 * 400 = 20\,000 \text{ руб.};$

г) Рассчитаем заработную плату рабочего за месяц при сдельно-премиальной системе оплаты труда.

Для определения размера премии нужно рассчитать процент превышения фактической выработки над плановой:

$$\%_{\text{превышения}} = (V_{\text{ф}} - V_{\text{пл}}) / V_{\text{пл}} * 100\%,$$

где: $V_{\text{ф}}$ – фактическая выработка за месяц, пар,
 $V_{\text{пл}}$ – плановая выработка за месяц, (24*15=360) пар.
 $\%_{\text{превышения}} = (400 - 360) / 360 * 100\% = 11 \%$

Рассчитаем заработную плату:

$$Z_{\text{раб.г}} = P * V_{\text{ф}} + П.$$

где: $П$ – премия 0,5 % от сдельного заработка за каждый процент превышения нормы выработки, т.е $(11 * 0,5 / 100) * Z_{\text{раб.}}$
 $Z_{\text{раб.г}} = 50 * 400 + 50 * 400 * (11 * 0,5 / 100) = 21\,100,0 \text{ руб.};$

д) Рассчитаем заработную плату рабочего за месяц при сдельно-прогрессивной системе оплаты труда. Для этого нужно рассчитать размер повышенной расценки:

$$P_{\text{п}} = P * K$$

где: $P_{\text{п}}$ – размер повышенной расценки,
 P – расценка за одну пару, 50,0 руб,
 K – повышающий коэффициент – 1,8.
 $P_{\text{п}} = 50,0 * 1,8 = 90,00 \text{ руб.},$

Рассчитаем заработную плату:

$$Z_{\text{раб.д}} = P * V_{\text{пл}} + (V_{\text{ф}} - V_{\text{пл}}) P_{\text{п}}$$

где: P – расценка за одну пару, ,
 $V_{\text{пл}}$ – плановая выработка за месяц, пар,
 $V_{\text{ф}}$ – фактическая выработка за месяц, пар,
 $P_{\text{п}}$ – размер повышенной расценки.
 $Z_{\text{раб.д}} = 50,0 * 360 + (400 - 360) * 90,00 = 21\,600,0 \text{ руб.}$

Задача 5. Определить заработок рабочего за месяц. Рабочий сдельщик 6 разряда выполнил норму выработки на 120%. Его заработок по сдельным расценкам составил 8765 руб. По положению сдельные расценки за продукцию сверх 110% нормы увеличиваются на 20%.

Дано

$N_{\text{выр}} = 120\%$

$Z = 8765 \text{ руб}$

$R_{\text{сд.повыш.}} = \text{на } 20\%.$ **Найти:** $Z_{\text{раб}} - ?$

Решение

1. Сдельный заработок за выполнение производственного задания на 110% составит:

$$З_{сд.} = З * Н_{выр.} = 8765 * 110\% / 100\% = 8765 * 1,1 = 9641,50 \text{ руб}$$

2. Сдельный заработок за выполнение производственного задания по повышенной сдельной расценке:

$$З_{сд..повыш} = З * П * К$$

где: П – перевыполнение производственного задания сверх установленной нормы 0,1, т.е. $((120-110)/100)$;

К – коэффициент увеличения сдельной расценки при условии выполнения задания сверх установленной нормы 1,2 т.е. $(120/100)$

$$З_{сд..повыш} = 8765 * 0,1 * 1,2 = 1051,8 \text{ руб}$$

3. Заработок рабочего за месяц: $З_{м.} = З_{сд.} + З_{сд..повыш}$

$$З_{м.} = 9641,50 + 1051,8 = 10693,3 \text{ руб.}$$

Задача 6. Бригада ремонтников за месяц собрала 2500 изделий, нормативная трудоемкость сборки одного изделия 0,1 часа. В месяце 20 рабочих дней, продолжительность смены 8 ч.

Рабочий	Разряд	Часовая тарифная ставка, р.	Отработанное время, час.	Тарифный коэффициент	КТУ	Количество баллов	Оплата 1 балла, в руб.	ФОТ
1	3	66	181	1,2	1,3	706	23,97	16922,82
2	2	54,5	181	1,1	1,3	471	23,97	11289,87
3	4	68	176	1,33	1,1	774	23,97	18552,78
4	4	68	154	1,33	0,9	554	23,97	13279,38
5	4	68	176	1,33	1,25	880	23,97	21093,6
Итого						3385		81125

Определить заработную плату каждого работника бригады:

- 1) с помощью расчета часо - коэффициентов.
- 2) с помощью расчета коэффициента трудового участия.
- 3) с помощью расчета коэффициента приработка.

Дано:

N = 2500 изделий

t = 0,1 час.

Драб = 20 дней

Тсм = 8 час.

п = 5 чел. **Найти:** Зраб - ?

Решение

1. При повременной оплате труда заработная плата начисляется в соответствии с тарифной ставкой работника или окладом за фактически отработанное время. Определить заработную плату с помощью **часо-коэффициента** можно по следующей формуле:

$$З_{п} = Т_{ст.} * п,$$

Таким образом, определим заработную плату рабочих:

$$ЗП1 = 66 * 181 = 11946 \text{ руб.};$$

$$ЗП2 = 54,5 * 181 = 9864,5 \text{ руб.};$$

$$ЗП3 = 68 * 176 = 11968 \text{ руб.};$$

$$ЗП4 = 68 * 154 = 10472 \text{ руб.};$$

$$ЗП5 = 68 * 176 = 11968 \text{ руб.}$$

2. Определить заработную плату с помощью расчета **коэффициента трудового участия** можно путем произведения оплаты одного балла на количество баллов работника.

Для начала определим фонд оплаты труда:

$$ФОТ = (Т_{ст.ср} * Т) * n$$

Где $Т_{ст.ср}$ – часовая тарифная ставка квалификационного разряда рабочего, руб
Т – количество времени, требующегося на изготовления всех изделий, час;

п – число сотрудников.

Рассчитаем количество времени, требующегося на изготовления всех изделий:

$$T = N * t,$$

где N – количество изделий;

t – трудоемкость сборки одного изделия.

$$T = 2500 * 0,1 = 250 \text{ часов};$$

Среднюю величину часовой тарифной ставки можно рассчитать по формуле:

$$T_{\text{ст.ср.}} = (T_{\text{ст}1} + T_{\text{ст}2} + T_{\text{ст}3} + T_{\text{ст}4} + T_{\text{ст}5}) / 5$$

где $T_{\text{ст}1}$, $T_{\text{ст}2}$, $T_{\text{ст}3}$, $T_{\text{ст}4}$, $T_{\text{ст}5}$ – часовые тарифные ставки каждого из рабочих.

Таким образом, $T_{\text{ст.ср.}} = (66 + 54,5 + 68 + 68 + 68) / 5 = 64,9$ руб.

Исходя из формулы: $\text{ФОТ} = (64,9 * 250) * 5 = 81125$ руб.

Количество баллов определяется перемножением разряда, отработанных человеко-часов и КТУ, заносим в таблицу.

$$K_{\text{бал}} = P * T_{\text{чел.}} * \text{КТУ},$$

$$K_{\text{бал}1} = 3 * 181 * 1,3 = 706$$

$$K_{\text{бал}2} = 2 * 181 * 1,3 = 471$$

$$K_{\text{бал}3} = 4 * 176 * 1,1 = 774$$

$$K_{\text{бал}4} = 4 * 154 * 0,9 = 554$$

$$K_{\text{бал}5} = 4 * 176 * 1,25 = 880$$

Оплата одного балла определяется делением ФОТ на общую сумму баллов всех рабочих, заносим в таблицу.

$$C1_{\text{бал}} = \text{ФОТ} / K_{\text{бал.общ}},$$

$$C1_{\text{бал}} = 81125 / 3385 = 23,97$$

А теперь определяем заработную плату с помощью расчета коэффициента трудового участия путем произведения оплаты одного балла на количество баллов работника.

$$\text{ЗП} = C1_{\text{бал}} * K_{\text{бал}},$$

$$\text{ЗП} 1 = 23,97 * 706 = 16922,82 \text{ руб.},$$

$$\text{ЗП} 2 = 23,97 * 471 = 11289,87 \text{ руб.},$$

$$\text{ЗП} 3 = 23,97 * 774 = 18552,78 \text{ руб.},$$

$$\text{ЗП} 4 = 23,97 * 554 = 13279,38 \text{ руб.},$$

$$\text{ЗП} 5 = 23,97 * 880 = 21093,6 \text{ руб.},$$

3. Определить заработную плату с помощью расчета **коэффициента приработка** (Зп) можно по следующей формуле:

$$З_{\text{п}} = (З + (t - N_{\text{р}}) * T_{\text{ст}}) * K_{\text{т}}$$

где З – заработная плата, берем из первой формулы;

$N_{\text{р}}$ – норма отработанного времени каждого сотрудника, час;

t – отработанное время каждым сотрудником, час;

$T_{\text{ст}}$ – часовая тарифная ставка квалификационного разряда рабочего, руб;

$K_{\text{т}}$ – тарифный коэффициент.

$$N_{\text{р}} = \text{Драб} * T_{\text{см}} = 20 * 8 = 160 \text{ часов.}$$

Исходя из формулы:

$$\text{Зп} 1 = (11946 + ((181 - 160) * 66)) * 1,2 = 15998,4 \text{ руб.}$$

$$\text{Зп} 2 = (9864,5 + ((181 - 160) * 54,5)) * 1,1 = 12109,9 \text{ руб.}$$

$$\text{Зп} 3 = (11968 + ((176 - 160) * 68)) * 1,33 = 17364,5 \text{ руб.}$$

$$\text{Зп} 4 = (10472 + ((154 - 160) * 68)) * 1,33 = 13385,1 \text{ руб.}$$

$$\text{Зп} 5 = (11968 + ((176 - 160) * 68)) * 1,33 = 17364,5 \text{ руб.}$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая часть

Условие берем из примеров, значения подставляем из таблицы согласно порядковому номеру в журнале.

ТАБЛИЦА 1 – Варианты заданий

№ Зад.	Исходные данные	Усл. обозн.	Варианты																			
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
№ 1	Норма выработки	Нвыр. пар	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	1,4	1,3	1,2	1,1	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	1,4	1,3	1,2	1,1
	Часовая тар. ставка	Тст. руб	116,82	116,92	116,98	117,00	117,09	117,15	116,71	116,52	116,41	116,32	117,52	117,61	117,72	117,85	117,91	117,99	116,99	116,88	116,65	116,12
№ 2	Выпуск в смену	N, пар	8	9	10	7	8	9	10	11	8	7	8	9	10	11	8	9	10	11	8	8
	Сдельная расценка	Р _{сд.бр} руб	712,2	722,1	712,8	713,9	713,4	712,7	711,6	712,6	713,8	714,2	714,1	712,5	712,3	711,4	711,9	722,4	712,1	712,9	732,2	712,2
№ 3	Премия	Пр, тыс.руб	30	40	40	30	35	45	50	48	30	28	35	35	35	38	40	50	45	30	35	36
	Отработанные часы	t1	170	160	172	170	165	171	172	167	170	170	170	170	172	170	173	172	170	170	170	170
		t2	175	170	172	172	170	176	177	172	173	175	176	177	176	176	175	176	176	175	176	175
		t3	170	175	170	170	165	171	172	168	170	171	170	170	170	171	171	170	170	170	170	170
		t4	160	166	160	166	155	161	162	160	162	160	162	163	162	160	161	165	163	160	162	160
№ 4	Часовая тар. ставка	Тст. руб	88,5	85,5	86,5	87,5	88,8	88,9	88,7	88,6	90,5	89,5	88,5	85,5	94,5	93,5	96,4	89,9	88,9	88,6	89,5	87,5
	Кол. раб. дн.	Драб	24	25	26	24	23	24	25	26	27	24	25	26	27	28	24	25	26	27	24	25
	Факт. выработка,	Вфак. пар	400	410	420	405	400	410	415	425	425	412	415	422	430	440	406	415	428	428	410	420
№ 5	Заработок	Зсд.	8765	9000	8900	8805	8090	8750	8999	9039	9688	8799	9088	9164	9267	9465	9055	8967	8988	8959	9000	9045
№ 6	Выпуск в см.	N	2500	2450	2480	2550	2504	2506	2508	2510	2520	2530	2540	2550	2560	2570	2580	2500	2500	2480	2450	2550
	Трудоемк.	t, час	0,1	0,12	0,13	0,1	0,12	0,13	0,13	0,12	0,1	0,11	0,12	0,13	0,13	0,1	0,12	0,12	0,11	0,12	0,13	0,1
	Отработанные часы	t1	181	180	180	181	182	181	180	181	179	181	180	181	179	180	181	181	180	181	181	181
		t2	181	180	181	181	181	181	181	181	179	181	181	181	178	180	181	181	181	180	182	181
		t3	176	175	176	175	177	177	177	176	175	176	178	176	174	176	175	176	177	176	176	176
		t4	154	154	153	154	155	154	154	156	154	154	156	154	152	154	155	156	154	155	154	154
		t5	176	175	176	175	176	177	177	176	175	176	177	176	174	176	176	177	176	176	172	176
	КТУ	КТУ ₁	1,3	1,2	1,3	1,3	1,2	1,3	1,1	1,2	1,3	1,2	1,3	1,3	1,2	1,3	1,2	1,3	1,3	1,2	1,3	1,3
		КТУ ₂	1,3	1,3	1,2	1,3	1,3	1,2	1,1	1,2	1,35	1,3	1,3	1,2	1,3	1,2	1,3	1,3	1,2	1,3	1,3	1,3
		КТУ ₃	1,1	1,1	1,2	1,1	1,1	1,1	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0	1,1	1,1	1,1	1,0	1,1
		КТУ ₄	0,9	1,0	0,9	0,9	0,95	0,9	0,95	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9	0,95	0,9	1,0	0,9	0,9	0,9	0,9
		КТУ ₅	1,25	1,25	1,20	1,15	1,25	1,15	1,25	1,25	1,2	1,1	1,15	1,25	1,25	1,20	1,20	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25

Практическая работа. Дробно-линейные уравнения и неравенства

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решать дробно-линейные уравнения и неравенства.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Рассмотрим несколько примеров дробно-линейных уравнений и неравенств.

Задание 1. Найдите корень уравнения

$$1. \frac{1}{4x-1} = 5$$

$$\frac{1}{4x-1} = \frac{5}{1}$$

$$4x-1 = \frac{1}{5}$$

$$4x = 1 + \frac{1}{5}$$

$$4x = \frac{5+1}{5}$$

$$4x = \frac{6}{5}$$

$$x = \frac{6}{5} : \frac{4}{1}$$

$$x = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{3}{10}$$

$$x = 0,3$$

Ответ: $x = 0,3$

$$6. \frac{3}{x-19} = \frac{19}{x-3}$$

$$\frac{3(x-3)}{3(x-3)} = \frac{19(x-19)}{(x-3)(x-19)}$$

$$3(x-3) = 19(x-19)$$

$$3x-9 = 19x-361$$

$$-9+361 = 19x-3x$$

$$-352 = 16x$$

$$16x = 352$$

$$x = \frac{352}{16}$$

$$x = 22$$

Ответ: $x = 22$

$$9. -\frac{2}{9}x = 1\frac{1}{9}$$

$$x = \frac{10}{9} : \left(-\frac{2}{9}\right)$$

$$x = \frac{10}{9} \cdot \left(-\frac{9}{2}\right)$$

$$x = -\frac{10}{2}$$

$$x = 5$$

Ответ: $x = 5$

$$2. \frac{1}{3x-4} = \frac{1}{4x-11}$$

$$3x-4 = 4x-11$$

$$3x-4x = -11+4$$

$$-x = -7$$

$$x = 7$$

Ответ: $x = 7$

$$3. \frac{1}{2x+7} = \frac{1}{3x+20}$$

$$2x+7 = 3x+20$$

$$x = -13$$

Ответ: $x = -13$

$$4. \frac{1}{10x+6} = 1$$

$$10x+6 = 1$$

$$10x = 1-6$$

$$10x = -5$$

$$x = -\frac{5}{10}$$

$$x = -0,5$$

Ответ: $x = -0,5$

$$5. \frac{x-119}{x+7} = 5$$

$$x-119 = 5(x+7)$$

$$x-119 = 5x+35$$

$$-4x = 154$$

$$x = -\frac{77}{2}$$

Ответ: $-\frac{77}{2}$

$$7. \frac{x-4}{x-6} = 2$$

$$x-4 = 2(x-6)$$

$$x-4 = 2x-12$$

$$x-2x = -12+4$$

$$-x = -8$$

$$x = 8$$

Ответ: $x = 8$

$$8. \frac{4}{7}x = 7\frac{3}{7}$$

$$x = 7\frac{3}{7} : \frac{4}{7}$$

$$x = \frac{52}{7} : \frac{4}{7}$$

$$x = \frac{52 \cdot 7}{7 \cdot 4}$$

$$x = \frac{52}{4}$$

$$x = 13$$

Ответ: $x = 13$

$$11. x - \frac{x}{12} = \frac{55}{12}$$

$$12x - x = 55$$

$$x(12-1) = 55$$

$$11x = 55$$

$$x = \frac{55}{11}$$

$$x = 5$$

Ответ: $x = 5$

$$10. 5-2x = 11-7(x+2)$$

$$5-2x = 11-7x-14$$

$$-2x+7x = 11-14-5$$

$$5x = -8$$

$$x = -\frac{8}{5}$$

$$x = -1,6$$

Ответ: $x = -1,6$

Задание 2. Решите неравенства

1.

$$\begin{cases} 6x + 18 \leq 0 \\ x + 8 \geq 2 \end{cases}$$

$$6x + 18 \leq 0 \quad x + 8 \geq 2$$

$$6x \leq -18 \quad x \geq 2 - 8$$

$$x \leq -3 \quad x \geq -6$$

$$\text{Ответ: } -6 \leq x \leq -3$$

2.

$$\begin{cases} 5x + 15 \leq 0 \\ x + 5 \geq 1 \end{cases}$$

$$5x + 15 \leq 0 \quad x + 5 \geq 1$$

$$5x \leq -15 \quad x \geq -5 + 1$$

$$x \leq -3 \quad x \geq -4$$

$$\text{Ответ: } -4 \leq x \leq -3$$

3.

$$\frac{x-2}{3-x} \geq 0$$

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2 \leq 0 \\ 3-x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x < 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2 \\ x > 3 \end{cases} \quad \text{нет общего решения}$$

$$2 \leq x < 3 \text{ или } x \in [2; 3)$$

$$\text{Ответ: } 2 \leq x < 3 \text{ или } x \in [2; 3)$$

Практическая часть:

Задание 1. Найдите корень уравнения

$$1. \frac{1}{5x-4} = 2$$

$$2. \frac{1}{5x-4} = \frac{1}{3x-7}$$

$$3. \frac{1}{2x+7} = \frac{1}{3x+20}$$

$$4. \frac{x-15}{x+3} = 4$$

$$5. \frac{3}{x-19} = \frac{19}{x-3}$$

$$6. \frac{x-5}{x-3} = 3$$

$$7. \frac{4}{9}x = 3\frac{5}{9}$$

$$8. -\frac{3}{5}x = 1\frac{1}{5}$$

Задание 2. Решите неравенства

$$1. \frac{x-1}{x(x-3)} > 0$$

$$2. \frac{4-9x^2}{10-x} \geq 0$$

$$3. \frac{3x-12x^2}{x+4} < 0$$

$$4. \frac{a(4a-11)}{a-7} \leq 0$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.
4. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Геометрия на плоскости

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решать планиметрические задачи.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Используемые формулы изучаемые в основной школе:

Периметр треугольника: $P=3a$

Периметр правильного четырехугольника: $P=4a$

Выражение стороны правильного треугольника через радиусы вписанной и описанной

окружности: $R = \frac{a}{\sqrt{3}}; r = \frac{a}{2\sqrt{3}}; R = 2r$.

Площадь круга: $S = \pi R^2$.

Площадь трапеции: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

Сумма углов шестиугольника 720° .

Катет лежащий напротив угла в 30° в два раза меньше гипотенузы.

Практическая часть:

Решите задачи:

1. Периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, равен 45 см. Найдите сторону правильного четырёхугольника, вписанного в ту же окружность.
2. Найдите площадь круга, если площадь вписанного в окружность квадрата равна 72 дм^2 .
3. Радиус окружности равен 8 см, а градусная мера дуги равна 150° . Найдите длину этой дуги.
4. Боковая сторона трапеции, равная 20 см, образует с меньшим её основанием угол в 150° . Вычислите площадь трапеции, если её основания равны 12 см и 30 см.
5. Найдите углы выпуклого шестиугольника, если они пропорциональны числам 2, 4, 4, 6, 8, 12.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.
4. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Раздел 2. Корни, степени, логарифмы

Практическая работа. Вычисление и сравнение корней

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение преобразования радикалов и применение свойств корня n -й степени.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Вообще, если n — натуральное число, m — целое число и частное $\frac{m}{n}$ является целым

числом, то при $a > 0$ справедливо равенство $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Определение. Арифметическим корнем натуральной степени $n \geq 2$ из неотрицательного a называется неотрицательное число, n -я степень которого равна a .

Арифметический корень n -й степени обладает следующими свойствами: если $a \geq 0$, $b > 0$ и n, m — натуральные числа, причем $n \geq 2$, $m \geq 2$, то

$$1. \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}. \quad 2. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \quad 3. (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}. \quad 4. (\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{m}} = \sqrt[nm]{a}$$

Сравнить числа $5^{2\sqrt{3}}$ и $5^{3\sqrt{2}}$.

Сравним показатели $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$. Так как $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$, $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ и $12 < 18$, то $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

Поэтому по теореме $5^{2\sqrt{3}} < 5^{3\sqrt{2}}$.

Практическая часть:

1. Вычислить:

$$1) \sqrt{64}; \quad 2) \sqrt[3]{27}; \quad 3) \sqrt[3]{8^2}; \quad 4) \sqrt[4]{81^3}; \quad 5) \sqrt[4]{\left(\frac{1}{16}\right)^{-3}} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^{-4}}; \quad 6) \frac{\sqrt[7]{8^9}}{\sqrt[7]{8^2}} - \sqrt[5]{3^6} \cdot \sqrt[3]{3^4}.$$

2. Выяснить, какое из чисел больше:

$$1) 3^{\sqrt{71}} \text{ или } 3^{\sqrt{69}}; \quad 2) \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}} \text{ или } \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}; \quad 3) 4^{-\sqrt{3}} \text{ или } 4^{-\sqrt{2}}; \quad 4) 2^{\sqrt{3}} \text{ или } 2^{1,7}.$$

$$3. \text{ Вычислить: } \left(\frac{15 \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{125^{-\frac{1}{3}}} - 2 \cdot 7^{\frac{1}{2}} \cdot 49^{\frac{1}{4}} \right) \left(\left(\frac{1}{81} \right)^{-\frac{1}{4}} + 45^{\frac{1}{2}} \right) - 183\sqrt{5}$$

4. Преобразуйте выражение:

$$1) \sqrt[4]{x^4 y^4} : (\sqrt{xy} \cdot \sqrt{x^2}) \quad 2) \sqrt[3]{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^4} : \sqrt[6]{x^5}} \cdot (x^2 : \sqrt[3]{x^2})^{\frac{1}{4}}$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.
4. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Контрольные вопросы:

1. При возведении степени в степень показатели ...
2. Может ли быть арифметический корень натуральной степени быть бесконечной непериодической дробью?

Практическая работа. Степень с рациональным и действительным показателями

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение нахождения степени с рациональными показателем и умение сравнивать степенные выражения, преобразования выражений, содержащих степени.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Для любых рациональных чисел p и q и любых $a > 0$ и $b > 0$ верны равенства:

$$1. a^p a^q = a^{p+q}; \quad 2. a^p : a^q = a^{p-q}; \quad 3. (a^p)^q = a^{pq};$$

$$4. (ab)^p = a^p b^p; \quad 5. \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

Приведем примеры применения свойств степени:

$$1) 7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{1+3}{4}} = 7;$$

$$2) 9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3;$$

$$3) \left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = 16^{\frac{1 \cdot 9}{3 \cdot 4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8.$$

Практическая часть:

1. Упростить выражение:

$$1) (a^4)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-6}; \quad 2) \left(\left(\frac{a^6}{b^{-3}}\right)^4\right)^{-\frac{1}{12}}.$$

2. Сократите дробь:

$$1) \frac{y - 16y^{\frac{1}{2}}}{5y^{\frac{1}{4}} + 20}; \quad 2) \frac{a^{\frac{4}{5}} - b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{5}} - b^{\frac{2}{5}}}.$$

3. Вычислить:

$$1) (0,001)^{-\frac{1}{3}} + 2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-\frac{1}{3}}; \quad 2)$$

$$(-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

4. Упростить выражение:

$$(0,2x^{-3}y^{-2})^2 \cdot \left(\frac{x^{-2}}{2y^3}\right)^{-2}$$

$$(4^{-1})^2 \cdot 2^5 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^3 \cdot (8^{-2})^5 \cdot (64^2)^3$$

$$2^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 4 : \frac{1}{2^5}$$

$$\left(-2\frac{1}{2}\right)^3 : (0,25)^2 \cdot ((-5)^{-2})^2$$

$$\left(-\frac{7x^2}{3y^4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{9y^2}{49x^4}\right)^{-2}$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.
4. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Контрольные вопросы:

1. При умножении чисел с одинаковым основанием показателя ...
2. При делении чисел с одинаковым основанием показателя ...

Практическая работа. Основные приемы решения уравнений

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться применять основные методы решения уравнений при решении уравнений.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Общие методы решения уравнений:

1. Замена уравнения $h(f(x))=h(g(x))$ на уравнение $f(x)=g(x)$.
2. Решение уравнения методом разложения на множители.
3. Решение уравнения методом введения новой переменной.

1. Замена уравнения $h(f(x))=h(g(x))$ на уравнение $f(x)=g(x)$.

Этот метод применяется при решении:

- а) показательных уравнений, когда от уравнения вида $af(x)=ag(x)$ ($a>0, a\neq 1$) переходим к уравнению $f(x)=g(x)$;
- б) логарифмических уравнений, когда от уравнения вида $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ ($a>0, a\neq 1$) переходим к уравнению $f(x)=g(x)$;
- в) иррациональных уравнений, когда от уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ переходим к уравнению $f(x)=g(x)$.

Этот метод можно применять только в том случае, когда $y=h(x)$ — монотонная функция, которая каждое своё значение принимает по одному разу.

Пример

Решить уравнение:

$$(2x+3)^7=(5x-9)^7$$

Так как функция $y=x^7$ — возрастающая функция, то можно перейти к уравнению:

$$2x+3=5x-9$$

Решив его, получим, что $x=4$.

2. Решение уравнения методом разложения на множители.

Если $\oplus \cdot \Delta \cdot \diamond = 0$, то $\oplus = 0$ или $\Delta = 0$ или $\diamond = 0$

Если произведение двух или более множителей равно 0, то хотя бы один из множителей равен 0.

(Это означает, что все множители одновременно не должны быть 0, поэтому пишется «или»)

Шаги решения	Пример
1. Все члены переносятся в левую часть уравнения, в правой должен быть 0.	$x^3=16xx^3-16x=0$
2. Левая часть раскладывается на множители.	$x(x^2-16)=0$
3. Каждый множитель приравнивается к 0.	$x=0$ или $x^2-16=0$
4. Решается каждое из полученных уравнений.	$x=0$ $x^2=16$ $x=\pm 4$
5. Записывается ответ:	$x=0, x=-4, x=4$

3. Решение уравнения методом введения новой переменной.

1. в уравнении какая-то его часть заменяется другой переменной ($a, u, t, \dots$) (прежнее неизвестное одновременно с новым в уравнении быть не может);
2. решается новое уравнение;
3. возвращаются к обозначенному и, используя полученное число (корни), вычисляется требуемое неизвестное.

Пример:

Реши уравнение $(2x-21)^2-5(2x-21)+4=0$.

Это уравнение можно решить и без использования новой переменной (раскрываются скобки по формуле разности квадратов и т. д.), но решение будет длинным и с большими числами.

Используем то, что обе скобки равны.

Обозначаем $2x-21=y$. Получается простое квадратное уравнение:

$$y^2-5y+4=0 \text{ по теореме Виета } y_1=4, y_2=1$$

Возвращаемся к обозначенному:

$$1) 2x-21=4$$

$$2x=25$$

$$x=12,5$$

$$2) 2x-21=1$$

$$2x=22$$

$$x=11$$

Ответ: $x=12,5; x=11$

Методом введения новой переменной решаются биквадратные уравнения:

$$ax^4+bx^2+c=0, \text{ где } a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$x^2=y$$

$$ay^2+by+c=0$$

В биквадратных уравнениях всегда используется новая переменная.

Получается квадратное уравнение.

Пример:

Реши уравнение:

$$x^4 - 13x^2 + 12 = 0$$

$$1) x^2 = 12 \quad x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

$$x^2 = y, \text{ тогда } y^2 - 13y + 12 = 0 \quad 2) x^2 = 1 \quad x = \pm 1$$

$$y_1 = 12 \quad y_2 = 1$$

$$\text{Ответ: } \{-2\sqrt{3}; -1; 2\sqrt{3}; 1\}$$

Какую замену можно использовать в этом уравнении?

$$\frac{4}{x^2+10} + \frac{5}{x^2+11} = 2 \quad \text{Стараемся выгодно обозначить}$$

$$x^2 + 10 = 4$$

$$\frac{4}{x^2+10} + \frac{5}{x^2+10+1} = 2 \quad x^2 + 10 = y$$

$$x^2 + 6 = 0$$

получили не верное равенство,
значит корней нет

$$\frac{4}{y} + \frac{5}{y+1} = 2$$

$$x^2 + 10 = -0,5$$

$$4(y+1)+5y=2y(y+1), y \neq 0, y \neq -1$$

$$x^2 + 10,5 = 0$$

$$2y^2 - 7y - 4 = 0 \Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -0,5$$

получили не верное равенство,
значит корней нет

Ответ: нет корней.

Практическая часть:

Решите уравнения:

$$1. (5x+3)^9 = (7x+8)^9.$$

$$2. (2x+1)^2 = (x-2)^2.$$

$$3. x^3 - 3x - 2 = 0.$$

$$4. x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

$$5. x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретического части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.
4. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Контрольные вопросы:

1. Назовите общие методы решения уравнений?

Практическая работа. Решение уравнений

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться находить корни уравнений не теряя области определения.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Равносильные уравнения – это уравнения, имеющие одни и те же корни, или не имеющие корней.

Под одними и теми же корнями понимается следующее: если какое-то число является корнем одного уравнения, то оно является и корнем любого другого из этих равносильных уравнений, и ни одно из равносильных уравнений не может иметь корня, который не является корнем любого другого уравнения.

Приведем примеры равносильных уравнений. Например, три уравнения $4 \cdot x = 8$, $2 \cdot x = 4$ и $x = 2$ – равносильные. Действительно, каждое из них имеет единственный корень 2, поэтому они равносильны по определению. Еще пример: равносильными являются два уравнения $x \cdot 0 = 0$ и $2 + x = x + 2$, множества их решений совпадают: корнем и первого и второго из них является любое число. Два уравнения $x = x + 5$ и $x^4 = -1$ также представляют собой пример равносильных уравнений на множестве действительных чисел, так как они оба не имеют действительных решений.

Примеры не равносильных уравнений.

Например, не равносильны уравнения $x = 2$ и $x^2 = 4$, так как второе уравнение имеет корень -2 , который не является корнем первого уравнения. Уравнения и также не являются равносильными, так как корнями второго уравнения являются любые числа, а число нуль не является корнем первого уравнения.

Давайте приведем примеры причин, когда область определения расширяется:

- Освобождение при решении уравнения от знаменателей, содержащих переменную величину.
- Освобождение в процессе решения от знаков корней четной степени.
- Освобождение в процессе решения от знаков логарифма.

Обязательно нужно делать проверку корней, если:

- произошло расширение области определения уравнения,
- осуществляется возведение обеих частей в одну и ту же четную степень,
- выполняется умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной.

Стоит заметить, что проверку корней стоит производить всегда (для всех корней уравнения).

Пример.

Решить уравнение: $\sqrt{2x+5} + \sqrt{5x-6} = 5$.

Решение.

Технический этап решения уравнения. Проведем различные преобразования уравнения.

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+5} &= 5 - \sqrt{5x-6} & (10\sqrt{2x+5})^2 &= (36-3x)^2 \\ (\sqrt{5x-6})^2 &= (5 - \sqrt{2x+5})^2 & 100(2x+5) &= 1296 - 216x + 9x^2 \\ 5x-6 &= 25 - 10\sqrt{2x+5} + (2x+5) & 9x^2 - 416x + 796 &= 0 \\ 10\sqrt{2x+5} &= 36 - 3x & x_1 = 2, x_2 &= 44\frac{2}{9}.\end{aligned}$$

Анализ решения.

В процессе решения уравнения дважды возводили в четную степень. Такое преобразование не является равносильным. Также произошло расширение области определения, т.к. в исходном уравнении встречались квадратные корни, которые накладывают свое ограничение. Значит, полученное в результате квадратное уравнение является уравнением следствием. Проверка корней обязательна.

Проверка корней.

Подставим все полученные корни в исходное уравнение.
При $x_1 = 2$, $\sqrt{2 * 2 + 5} + \sqrt{5 * 2 - 6} = \sqrt{9} + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5$ - выполнено.

При $x_2 = 44\frac{2}{9}$, $\sqrt{2 * 44\frac{2}{9} + 5} + \sqrt{5 * 44\frac{2}{9} - 6}$ явно больше 5. Уже первое подкоренное выражение больше 25, а мы к нему прибавляем еще положительное число. Значит, это постороннее решение.

Ответ: $x=2$.

Проверка корней может быть сложной вычислительной операцией. Как в примере выше, полная проверка второго корня заняла не мало времени. В случаях сложных вычислений стоит попробовать найти обходной путь.

При проверке можно использовать приближенные значения полученных корней или подстановкой их в более простые уравнения, полученные при преобразовании. При этом, надо быть полностью уверенным в равносильности преобразований.

Чаще всего (но не всегда), достаточно проверить ОДЗ заданного уравнения.

При преобразовании уравнений также может происходить потеря корней. Когда такая ситуация может возникнуть?

- Деление обеих частей уравнения на одно и тоже выражение $h(x)$ (кроме случая, когда уверены что $h(x)$ не обращается нуль при любых x).
- Сужение области определения уравнения в процессе решения.

Бороться с первой причиной довольно просто. Нужно привыкнуть переходить к уравнению вида $h(x) * (f(x) - g(x))$ или вообще стараться не делить на выражения содержащие x .

При решении уравнений и их преобразовании нужно быть абсолютно уверенным в правильности применения той или иной формулы!

Практическая часть:

Решить следующие уравнения:

1. $\sqrt{6x - 4} = 1$

2. $\sqrt{3x^2 - 4x - 1} = \sqrt{2x^2 - 5x - 3}$.

3. $\sqrt{x^2 - x + 3} = \sqrt{3x^2 - 5x + 6}$.

4. $8 - 2x = \sqrt{x + 1}$.

5. $\sqrt{x + 8} - \sqrt{7x + 9} = -1$

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.
4. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Контрольные вопросы:

1. Дайте понятие равносильных уравнений.
2. Дайте понятие ОДЗ.

Практическая работа. Решение показательных уравнений

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решения всех способов решения показательных уравнений.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Что такое **показательное уравнение**? Это уравнение, в котором неизвестные и выражения находятся в **показателе** определенной степени.

Примеры показательных уравнений:

$$5^{x+2} = 125$$

$$3^x \cdot 2^x = 8^{x+3}$$

$$3^{2x} + 4 \cdot 3^x - 5 = 0$$

Рассмотрим решение простейших показательных уравнений.

Например:

Пример 1:

$$3^x = 3^2$$

Приравниваем показатели степени и получаем:

$$x = 2$$

Пример 2:

$$2^{2x} - 8^{x+1} = 0$$

Основания должны быть одинаковые.

Так как $8 = 2^3$ получим $8^{x+1} = (2^3)^{x+1}$.

По формуле действий со степенями: $(a^n)^m = a^{nm}$, получим $8^{x+1} = (2^3)^{x+1} = 2^{3(x+1)}$.

Исходный пример стал выглядеть вот так:

$$2^{2x} - 2^{3(x+1)} = 0$$

Переносим $2^{3(x+1)}$ вправо, получаем:

$$2^{2x} = 2^{3(x+1)}$$

Приравниваем показатели степени и получаем:

$$2x = 3(x+1)$$

$$2x = 3x + 3$$

$$x = -3$$

Пример 3:

$$3^{2x+4} - 11 \cdot 9^x = 210$$

$$9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$$

По тем же правилам действий со степенями:

$$3^{2x+4} = 3^{2x} \cdot 3^4$$

Вот и отлично, можно записать:

$$3^{2x} \cdot 3^4 - 11 \cdot 3^{2x} = 210$$

Мы привели пример к одинаковым основаниям.

Вынесем за скобки 3^{2x} . Попробуем, а дальше видно будет:

$$3^{2x}(3^4 - 11) = 210$$

$$3^4 - 11 = 81 - 11 = 70$$

$$70 \cdot 3^{2x} = 210$$

Делим обе части уравнения на 70, получаем:

$$3^{2x} = 3$$

$$3^{2x} = 3^1$$

$$2x = 1$$

$$x = 0,5$$

Рассмотрим пример с заменой переменной в решении показательных уравнений.

Решим уравнение:

$$4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$

Переходим к одному основанию. К двойке.

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$$

Получаем уравнение:

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$

Замена переменной $2^x = t$.

$$\text{Тогда } 2^{2x} = 2^{x^2} = (2^x)^2 = t^2$$

Заменяем в нашем уравнении все степени с иксами на t:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

Используя теорему Виета получим

$$t_1 = 2$$

$$t_2 = 1$$

Делаем обратную замену. Сначала для t_1 :

$$t_1 = 2 = 2^x$$

$$2^x = 2$$

$$x_1 = 1$$

Один корень нашли. Ищем второй, из t_2 :

$$t_2 = 1 = 2^x$$

$$2^x = 1$$

Практическая часть:

1. Решите уравнения:

$$2^{x^2} = \frac{8^x}{16}; \quad 2. \quad 3^{x+2} - 3^{x+1} + 3^x = 21; \quad 3. \quad 3^{x^2+1} = 27\sqrt{3} \cdot 3^x; \quad 4. \quad 4^x + 2^{2x+1} - 16^{\frac{x-1}{2}} = 47; \quad 5. \quad 3^x + 3^{1-x} = \frac{28}{3}$$

2. Решите уравнения сводящиеся к квадратным:

$$1) \quad 9^x - 3^x - 6 = 0;$$

$$2) \quad 4^x - 2^x = 12;$$

$$3) \quad 5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x - 1 = 0;$$

$$4) \quad 3 \cdot 9^x + 11 \cdot 3^x = 4.$$

$$5). \quad 7^{2x} - 6 \cdot 7^x - 7 = 0.$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.
4. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Контрольные вопросы:

1. Через какую точку проходят графики всех показательных функций вида $y=a^x$?
2. Какое уравнение называется показательным?
3. При каких b показательное уравнение $a^x=b$ имеет корень?
4. Сколько корней имеет уравнение $a^x=b$?
5. Как решать уравнение вида $a^{f(x)}=a^{g(x)}$?

Практическая работа. Система показательных уравнений

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умения при решении систем показательных уравнений.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

При решении систем показательных уравнений и неравенств, применяются те же приемы, что при решении систем алгебраических уравнений и неравенств (метод подстановки, метод сложения, метод введения новых переменных). Во многих случаях, прежде чем применить тот или иной метод решения, следует преобразовать каждое уравнение (неравенство) системы к возможно более простому виду.

Примеры.

1.
$$\begin{cases} x + 2y = -1, \\ 4^{x+y^2} = 16 \end{cases}$$

Решение:

Решим эту систему способом подстановки:

$$\begin{cases} x = -2y - 1, \\ 4^{-2y-1+y^2} = 4^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 1, \\ y^2 - 2y - 1 = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 1, \\ y^2 - 2y - 3 = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} y_1 = 3, \\ x_1 = -7, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y_2 = -1, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $(-7; 3); (1; -1)$.

2.

$$\begin{cases} 3^{y+1} - 2^x = 5, \\ 4^x - 6 \cdot 3^y + 2 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Обозначим $2^x = u$, $3^y = v$. Тогда система запишется так:

$$\begin{cases} 3v - u = 5, \\ u^2 - 6v + 2 = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему способом подстановки:

$$\begin{cases} u = 3v - 5, \\ (3u - 5)^2 - 6v + 2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3v - 5 \\ 9v^2 - 36v + 27 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u = 3v - 5, \\ v^2 - 4v + 3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = 1, \\ u_1 = -2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} v_2 = 3, \\ u_2 = 4. \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} 2^x = -2, \\ 3^y = 1. \end{cases}$$

Уравнение $2^x = -2$ решений не имеет, т.к. $-2 < 0$, а $2^x > 0$.

b)
$$\begin{cases} 2^x = 4, \\ 3^y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $(2; 1)$.

3.
$$\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 162, \\ 3^x \cdot 4^y = 48. \end{cases}$$

Решение:

Перемножим уравнения данной системы. Получим

$$\begin{cases} 6^x \cdot 36^y = 162 \cdot 48, \\ 3^x \cdot 4^y = 48, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^{x+2y} = 6^5, \\ 3^x \cdot 4^y = 48, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3^x \cdot 4^y = 48, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y, \\ 3^{5-2y} \cdot 4^y = 48, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y, \\ \frac{3^5 4^y}{9^y} = 48, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y, \\ \left(\frac{4}{9}\right)^y = \frac{48}{3^5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2y, \\ \left(\frac{4}{9}\right)^y = \left(\frac{4}{9}\right)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ x = 1. \end{cases}$$

Ответ: (1;2).

$$4. \begin{cases} 3^{x-1} \leq \sqrt{3}, \\ (0,2)^{3x^2-2} = (0,2)^{2x^2+x+4}, \end{cases}$$

Решение:

1) Решим неравенство

$$3^{x-1} \leq \sqrt{3},$$

$$3^{x-1} \leq 3^{\frac{1}{2}}$$

$$x-1 \leq \frac{1}{2},$$

т.к. функция $y=3^t$ возрастает, $x \leq 1,5$.

2) Решим уравнение

$$(0,2)^{3x^2-2} = (0,2)^{2x^2+x+4},$$

$$3x^2-2 = 2x^2+x+4,$$

$$x^2-x-6=0,$$

$$x_1 = 2 > 1,5;$$

$$x_2 = -3 < 1,5; \text{ следовательно } x = -3.$$

Ответ: -3.

Практическая часть:

1. Решить систему уравнений.

$$1) \begin{cases} 4^x \cdot 2^y = 32, \\ 3^{8x+1} = 3^{3y}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3^{3x-2y} = 81, \\ 3^{6x} \cdot 3^y = 27. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2^x + 2^y = 6, \\ 2^x - 2^y = 2; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3^x + 5^y = 8, \\ 3^x - 5^y = -2. \end{cases}$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.
4. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Контрольные вопросы:

1. Нужно ли выполнять проверку полученных точек при решении системы уравнений?
2. Может ли быть показатель степени отрицательным числом?

Практическая работа. Нахождение значений логарифма по произвольному основанию.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: изучить основные свойства логарифмов и закрепить умение находить значения логарифма по произвольному основанию.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Вспомним основные свойства логарифмов.

1. $\log_a 1 = 0$.

Комментарий. Логарифм единицы по любому основанию равен нулю.

Для $\log_a a = 1$.

Комментарий. Логарифм равен единице в случае равенства чисел (выражений) — основания логарифма и выражения, стоящего под логарифмом.

2. $a^{\log_a b} = b$.

Комментарий. Представленная формула является одним из вариантов записи определения логарифма.

3. $\log_a (bc) = \log_a |b| + \log_a |c|$.

4. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|$.

5. $\log_a (b^p) = p \cdot \log_a |b|$.

6. $\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \cdot \log_{|a|} b$.

7. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$; $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$; $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

8. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

Комментарий. Предполагается, что во всех представленных формулах параметры принимают допустимые значения.

Пример 1.

$$5^{\log_3 90} \left(\frac{1}{5} \right)^{\log_3 10}$$

Вычислить

Решение

Представим $\frac{1}{5}$ в виде степени числа 5, тогда $5^{\log_3 90} \left(\frac{1}{5} \right)^{\log_3 10} = 5^{\log_3 90} (5^{-1})^{\log_3 10}$.

Далее воспользуемся правилом умножения степеней одинаковым основанием (при умножении степеней с одинаковым основанием показатели складываются):

$$5^{\log_3 90} \left(\frac{1}{5} \right)^{\log_3 10} = 5^{\log_3 90 - \log_3 10}$$

Преобразуем полученную в процессе решения разность логарифмов (по одному основанию) и применим определение логарифма (зададим вопрос: В какую степень следует возвести основание логарифма 3, чтобы получить число, стоящее под логарифмом — 9?):

$$5^{\log_3 90} \left(\frac{1}{5} \right)^{\log_3 10} = 5^{\log_3 90 - \log_3 10} = 5^{\log_3 9} = 5^2 = 25.$$

Ответ: 25.

Пример 2. Упростить выражение $\sqrt[3]{343^{\frac{2}{3\log_{27} 7}}}$.

Решение

Упростим показатель степени подкоренного

$$\frac{2}{3\log_{27} 7} = \frac{2}{3\log_{3^3} 27} = \frac{2}{3 \cdot \frac{1}{3} \log_3 7} = 2 \cdot \frac{1}{\log_3 7} = 2 \log_7 3.$$

выражения:

Тогда

$$\sqrt[3]{343^{\frac{2}{3\log_{27} 7}}} = \sqrt[3]{(7^3)^{2\log_7 3}} = \sqrt[3]{(7^{\log_7 3})^6} = \sqrt[3]{3^6} = 3^3 = 27.$$

Ответ: 27.

Практическая часть:

Вычислить:

1.

$$\begin{aligned} &1) \log_a a, \log_a 1, \log_a a^5, \log_a \frac{1}{a}, \log_a \sqrt{a}, \log_a \sqrt[5]{a^3}; \\ &2) \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}, \log_{\frac{1}{2}} 2, \log_{\frac{1}{2}} 1, \log_{\frac{1}{2}} 8, \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}, \log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ &3) \log_3 27, \log_3 \frac{1}{9}, \log_9 \frac{1}{27}, \log_2 \sqrt{2}, \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}, \log_{\sqrt{2}} 4, \log_{\sqrt{5}} \sqrt[4]{125}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} &1) \log_2 \log_3 81; \quad 2) \log_3 \log_2 8; \quad 3) 2 \log_{27} \log_{10} 1000; \\ &4) \frac{1}{3} \log_9 \log_2 8; \quad 5) 3 \log_2 \log_4 16 + \log_{\frac{1}{2}} 2. \end{aligned}$$

3. $9^{\log_5 65} \cdot 3^{-\log_5 169}$.

Порядок выполнения работы:

5. Изучение материала теоретического части.
6. Выполнение задания практической части.
7. Оформление вывода.
8. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Контрольные вопросы:

1. Может ли быть подлогарифмическое выражение меньше нуля?
2. Может ли быть основание логарифма быть равным 1?
3. Верно ли утверждение $\log_{0,5} 7 = -\log_2 7$?

Практическая работа. Логарифмирование и потенцирование выражений

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться использовать приемы логарифмирования и потенцирования.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Если некоторое выражение составлено из положительных чисел посредством умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня, то логарифм всего этого выражения легко выразить через логарифмы входящих в него чисел.

Пусть, например, $x = \frac{13^2 \sqrt[3]{140}}{\sqrt[5]{67 \cdot 98}}$.

Тогда по теореме о логарифме дроби

$$\log_a x = \log_a(13^2 \sqrt[3]{140}) - \log_a \sqrt[5]{67 \cdot 98}$$

Теорема о логарифме произведения дает:

$$\log_a(13^2 \sqrt[3]{140}) = \log_a 13^2 + \log_a \sqrt[3]{140},$$

$$\log_a \sqrt[5]{67 \cdot 98} = \log_a \sqrt[5]{67} + \log_a \sqrt[5]{98}$$

Теперь, используя теоремы о логарифме степени и корня, получаем:

$$\log_a 13^2 = 2 \log_a 13, \quad \log_a \sqrt[5]{67} = \frac{1}{5} \log_a 67,$$

$$\log_a \sqrt[3]{140} = \frac{1}{3} \log_a 140, \quad \log_a \sqrt[5]{98} = \frac{1}{5} \log_a 98.$$

Таким образом,

$$\log_a x = 2 \log_a 13 + \frac{1}{3} \log_a 140 - \frac{1}{5} \log_a 67 - \frac{1}{5} \log_a 98.$$

Переход от выражения к его логарифму называется *логарифмированием* этого выражения.

Операция, обратная логарифмированию, называется *потенцированием*. Она заключается в том, что по логарифму некоторого выражения восстанавливается само выражение. Поясним это на следующем примере. Пусть

$$\log_a x = 2 \log_a 10 - \frac{1}{2} \log_a 7 - 3 \log_a 3 + \frac{1}{3} \log_a 19.$$

Прежде всего, используя теоремы о логарифме степени и корня, можно записать:

$$2 \log_a 10 = \log_a 10^2 = \log_a 100,$$

$$\frac{1}{2} \log_a 7 = \log_a (7)^{1/2} = \log_a \sqrt{7},$$

$$3 \log_a 3 = \log_a 3^3 = \log_a 27,$$

$$\frac{1}{3} \log_a 19 = \log_a (19)^{1/3} = \log_a \sqrt[3]{19}$$

После этого $\log_a x$ можно записать в виде

$$\log_a x = \log_a 100 - \log_a \sqrt{7} - \log_a 27 + \log_a \sqrt[3]{19}$$

Теперь, используя теоремы о логарифме произведения и частного, получим:

$$\begin{aligned} \log_a x &= (\log_a 100 + \log_a \sqrt[3]{19}) - (\log_a \sqrt{7} + \log_a 27) = \\ &= \log_a (100 \cdot \sqrt[3]{19}) - \log_a (\sqrt{7} \cdot 27) = \log_a \frac{100 \sqrt[3]{19}}{27 \sqrt{7}}. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } \log_a x = \log_a \frac{100 \sqrt[3]{19}}{27 \sqrt{7}}.$$

Но если логарифмы двух положительных чисел по одному и тому же основанию равны, то

$$\text{равны и сами эти числа. Поэтому } x = \frac{100 \sqrt[3]{19}}{27 \sqrt{7}}.$$

Практическая часть:

Прологарифмировать по основанию 10 следующие выражения:

1.

а) $x = 3a^7$; в) $x = a^2 \sqrt[7]{ab^5}$;

б) $x = 15a^3b^3c^7$; г) $x = a \sqrt[3]{ab^2}$.

2.

а) $x = \left(\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt{3ab}} \right)^4$;

б) $x = \sqrt[4]{\frac{3}{a^3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{b^2}}$;

3. Найти x из данных уравнений:

а) $\log_3 x = \frac{1}{3} \log_3 8$;

б) $\log_3 x = \frac{2}{3} \log_3 8 + \frac{1}{2} \log_3 16$;

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.
4. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Контрольные вопросы:

1. Перечислить используемые в работе свойства логарифма.

Практическая работа. Приближенные вычисления и решения прикладных задач

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить и проверить умения находить значения десятичных и натуральных логарифмов с помощью микрокалькулятора.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Десятичный логарифм - логарифм по основанию 10; пишут $\lg b$ вместо $\log_{10} b$.

Натуральный логарифм - логарифм по основанию e , где e - иррациональное число, $e \sim 2,7$.

Пишут $\ln b$ вместо $\log_{10} b$.

Формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (1)$$

где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$.

Задача:

С помощью микрокалькулятора МК-51 вычислить $\log_3 80$.

► 1) С помощью десятичных логарифмов:

$$80 \boxed{\lg} \boxed{\div} 3 \boxed{\lg} \boxed{=} 3,9886927.$$

2) С помощью натуральных логарифмов:

$$80 \boxed{\ln} \boxed{\div} 3 \boxed{\ln} \boxed{=} 3,9886928.$$

Ответ: $\log_3 80 \approx 3.99$.

Практическая часть:

1. Вычислить с помощью микрокалькулятора:

- 1) $\lg 13$; 2) $\lg 9$; 3) $\lg 0,25$; 4) $\lg(3/4)$;
5) $\ln 27$; 6) $\ln 3$; 7) $\ln 0,12$; 8) $\ln(8/9)$.

2. Выразить данный логарифм через десятичный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

- 1) $\log_3 16$; 2) $\log_7 19$; 3) $\log_{11} 0,6$; 4) $\log_{0,5} 1,63$;
1) $\log_{0,6} 64$; 2) $\log_{2,3} 92$; 3) $\log_5 23$; 4) $\log_{1,2} 0,37$.

3. Выразить данный логарифм через натуральный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

- 1) $\log_2 9$; 2) $\log_6 18$; 3) $\log_{0,3} 0,9$; 4) $\log_{0,9} 6,3$;
1) $\log_2 61$; 2) $\log_3 62$; 3) $\log_5 37$; 4) $\log_{0,2} 0,58$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Вычисление и сравнение логарифмов.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить понятие логарифма, закрепить умение применять свойства логарифмов при вычислении и сравнении логарифмических выражений.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Иногда оказывается полезным от логарифмов по одному основанию (например, a) перейти к логарифмам по другому основанию (например, c). В этом случае пользуются следующей

формулой: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (1)

При этом предполагается, что a , b и c — положительные числа, причем a и c отличны от единицы.

Пусть, например, нам известно, что $\log_{10} 2 \approx 0,3010$, $\log_{10} 3 \approx 0,4771$. Требуется найти $\log_2 3$.

По формуле (1)

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \approx \frac{0,4771}{0,3010} \approx 1,58.$$

Для доказательства формулы (1) воспользуемся основным логарифмическим тождеством $a^{\log_a b} = b$.

Примеры: $\log_{32} 2 = \frac{1}{\log_2 32} = \frac{1}{\log_2 2^5} = \frac{1}{5}$; $\log_{125} 5 = \frac{1}{\log_5 125} = \frac{1}{\log_5 5^3} = \frac{1}{3}$.

Практическая часть:

1. Зная, что $\log_{10} 2 \approx 0,3010$ и $\log_{10} 3 \approx 0,4771$, найти:

а) $\log_3 2$; б) $\log_3 8$; в) $\log_3 12$; г) $\log_{12} 3$.

2. Доказать неравенство:

$$\log_2 5 + \log_5 2 > 2;$$

3. Сравните числа:

а) $\log_4 7$ и $\log_4 23$; в) $\log_9 \sqrt{15}$ и $\log_9 13$;

б) $\log_{\frac{2}{3}} 0,8$ и $\log_{\frac{2}{3}} 1$; г) $\log_{\frac{1}{12}} \frac{1}{7}$ и $\log_{\frac{1}{12}} \frac{2}{3}$.

4. Сравните с единицей число:

а) $\log_3 41$; б) $\log_{2,3} 0,1$; в) $\log_{\frac{1}{7}} 2,6$; г) $\log_{\sqrt{7}} 0,4$.

5. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $\log_2 0,7$; $\log_2 2,6$; $\log_2 0,1$; $\log_2 \frac{1}{6}$; $\log_2 3,7$;

б) $\log_{0,3} 17$; $\log_{0,3} 2,7$; $\log_{0,3} \frac{1}{2}$; $\log_{0,3} 3$; $\log_{0,3} \frac{2}{3}$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.
4. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Контрольные вопросы:

1. Перечислить используемые в работе свойства логарифма.

Практическая работа. Решение логарифмических уравнений

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: формировать умение решать логарифмические уравнения.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Определение. Уравнения, которые содержат переменную под знаком логарифма или в его основании, называются логарифмическими.

Простейшие логарифмические уравнения:

1. $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b, x > 0, a > 0, a \neq 1$
2. $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b, f(x) > 0, a > 0, a \neq 1$
3. $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}, f(x) > 0, a > 0, a \neq 1$
4. Уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$, где $a > 0, a \neq 1$.
5. Уравнение $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ \varphi(x) \neq 1 \end{cases}$ или системе $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ \varphi(x) \neq 1 \end{cases}$.

Так же при решении логарифмических выражений применяется метод потенцирования – переход от уравнения с логарифмами к уравнениям, которые их не содержат; и метод замены переменной.

ПРИМЕР 1

Задание Решить уравнение $\log_{0,1} x = 3$

Решение ОДЗ: $x > 0$.

Это уравнение первого вида $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b, a > 0, a \neq 1$. Для нахождения решения, возведем основание логарифма в степень равную 3 (правая часть уравнения), получим:

$$x = (0,1)^3 \Rightarrow x = 0,001$$

Полученное решение принадлежит ОДЗ, поэтому $x = 0,001$ – решение исходного уравнения.

Ответ $x = 0,001$

ПРИМЕР 2

Задание Решить уравнение $\lg(10 - x) = 4$

Решение Определим область допустимых значений (ОДЗ):

$$10 - x > 0 \Rightarrow x < 10 \Rightarrow x \in (-\infty, 10)$$

Имеем логарифмическое уравнение вида $\log_a f(x) = b$, решение которого $f(x) = a^b$. В нашем случае рассматривается десятичный логарифм, то есть его основание равно 10, тогда:

$$10 - x = 10^4$$

$$10 - x = 10000$$

$$x = 10 - 10000$$

$$x = -9990$$

Полученное значение x принадлежит ОДЗ, поэтому $x = -9990$ является решением исходного уравнения.

Ответ $x = -9990$

Практическая часть:

Вариант I

Вариант II

Решите уравнение:

1) $\log_4 \frac{1}{x^2} + \log_4 \sqrt{x} = -3$

2) $\lg 10x \cdot \lg 0,1x = 3$

3) $\log_{0,5}(2x - 3) -$
 $-\frac{1}{2}\log_{0,5}(2x + 3) = 0$

4) $\log_2(x^2 - 3x + 10) = 3$

5) $\log_3^2 x - \log_3 x = 2$

1) $\log_{0,5} \frac{1}{x} + 4\log_{0,5} \sqrt[3]{x} = -1$

2) $\lg 100x \cdot \lg 0,01x = 5$

3) $\frac{1}{2}\log_3(5x - 1) - \log_3(x + 1) = 0$

4) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x - 1) = -2$

5) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x - \log_{\frac{1}{2}} x = 6$

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретического части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.
4. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Контрольные вопросы:

1. Перечислить используемые в работе свойства логарифма.

Практическая работа. Логарифмические функции в природе и технике

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: познакомиться с применением логарифмических функций в природе и технике.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Мы все знакомы с основными арифметическими действиями: сложением, вычитанием, умножением и делением. Пятым арифметическим действием является возведение в степень. Возведение в степень имеет два обратных действия: извлечение корня и логарифмирование.

Логарифмы появились в XVI в. под влиянием все возрастающих потребностей практики как средство для упрощения вычислений. Их изобретение тесно связано с развитием в XVI веке производства и торговли, астрономии и мореплавания, требовавших усовершенствования методов вычислительной математики. Все чаще требовалось производить громоздкие действия над многозначными числами, все точнее и точнее должны были быть результаты действий. Поэтому открытие логарифмов, сводящее умножение и деление чисел к сложению и вычитанию их логарифмов, удлинило, по выражению Лапласа, жизнь вычислителей.

Логарифмы необычайно быстро вошли в практику. Было создано практическое средство - таблицы логарифмов, резко повысившее производительность труда вычислителей. Уже в 1623 г. английским математиком Д. Гантсром была изобретена первая логарифмическая линейка, ставшая рабочим инструментом для многих поколений.

Математики, выделяя самые существенные черты того или иного наблюдаемого в природе явления, вводя числовые характеристики и связывая эмпирические данные с помощью различных математических зависимостей, тем самым составляют математическую модель явления. При составлении модели того или иного явления, достаточно часто обращаются именно к логарифмической функции. Одним из наиболее наглядных примеров такого обращения является логарифмическая спираль.

Логарифмическая спираль - это линии в геометрии, отличные от прямых и окружностей, которые могут скользить по себе. Логарифмическую спираль называют равноугольной спиралью. Логарифмическая спираль знаменита и своими удивительными свойствами:

1. Она остается неизменной не только при преобразовании подобия, но и при других различных преобразованиях.

2. Логарифмическая спираль пересекает свои радиус-векторы под постоянным углом. В любой точке логарифмической спирали угол между касательной к ней и радиус-вектором сохраняет постоянное значение. На основании этого ее называют равноугольной.

3. Последнее свойство находит свое применение в технике. В технике часто применяются вращающиеся ножи. Сила, с которой они давят на разрезаемый материал, зависит от угла резания, т.е. угла между лезвием ножа и направлением скорости вращения. Для постоянного давления нужно, чтобы угол резания сохранял постоянное значение, а это будет в том случае, если лезвия ножей очерчены по дуге логарифмической спирали. Величина угла резания зависит от обрабатываемого материала.

Логарифмическая спираль является спиралью, которая наиболее часто встречается в природе.

1. Известно, что живые существа обычно растут, сохраняя общее начертание своей формы. Раковины морских животных могут расти лишь в одном направлении. Чтобы не слишком вытягиваться им приходится скручиваться, причем каждый следующий виток подобен предыдущему. А такой рост может совершаться лишь по логарифмической спирали, можно сказать, что эта спираль является математическим символом соотношения форм роста. Поэтому раковины многих моллюсков, улиток, а так же рога таких млекопитающих

как архары, закручены по логарифмической спирали. "Никогда еще в природе не существовало столь совершенного примера логарифмических спиралей, чем начертания рога носорога". Рога горного барана, клюв попугая может расти лишь по логарифмической спирали или ее некоторым пространственным аналогам

2. Семечки в подсолнухе расположены по дугам, так же близким к логарифмической спирали.

3. Один из наиболее распространенных пауков ЭПЕЙРА, сплетая паутину, закручивает нити вокруг центра по логарифмической спирали.

4. Цепочки молекулы ДНК закручены по логарифмической спирали. Молекулы ДНК имеют огромную по молекулярным масштабам длину и состоят из 2-х нитей, сплетённых между собой в двойную спираль.

5. По логарифмическим спиральям закручены и многие галактики, в частности, галактика которой принадлежит Солнечная Система.

6. По аналогии со спиралевидной закрученной раковине улитки у женщин существует причёска «улитка» из длинных косичек.

7. Траектории насекомых, летящих на свет, также описывают логарифмическую спираль

8. Траектория движения разбегающегося испуганного стада северных оленей напоминает логарифмическую спираль.

9. В гидротехнике по логарифмической спирали изгибают трубу, проводящую поток воды к лопастям турбины. Благодаря такой форме трубы потери энергии на изменение направления течения в трубе оказываются минимальными, и напор воды используется с максимальной производительностью.

В заключение работы можем сказать, что мы не исчерпали всех примеров применения логарифмов, так как сделать это очень сложно. Логарифмы находят самое широкое применение при обработке результатов тестирования в психологии и социологии, в составлении прогнозов погоды и даже в музыке, а также других областях науки и техники. Главное мы достигли поставленной цели и поняли, как широко применяются знания логарифмов, а главное, что не зря мы их изучаем.

Практическая часть:

Задание 1 . Выпишите через точку с запятой, где встречаются логарифмы в природе и технике используя выше приведенный текст.

Задание 2. Найдите применение логарифмов в сети интернет, кроме вышеупомянутых. Выпишите найденные примеры.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Построение логарифмической спирали

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умения построения логарифмической спирали в полярной системе координат.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Построение спирали.

Формула логарифмической спирали $r = ae^{\varphi}$.

Пусть порядковый номер 29, где $n=4$ (остаток от деления на 5), тогда $a = \frac{\sqrt{4}}{500} = 0,02$.

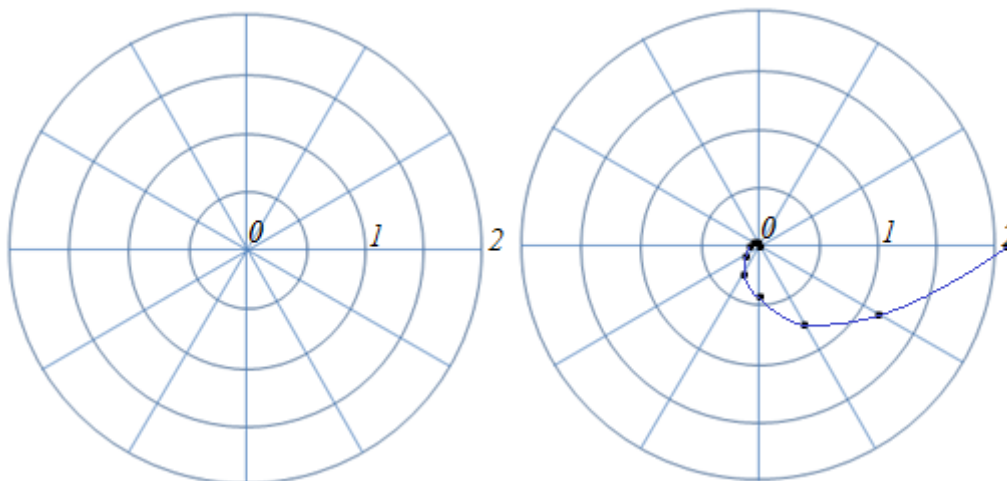
Выпишем формулу логарифмической спирали $r = 0,02e^{\varphi}$. Данные округляем до сотых.

В связи с тем, что значение функции очень быстро растет, построим один виток спирали на круге.

Заполним таблицу.

φ	0	$30^\circ \approx 0,52$	$60^\circ \approx 1,05$	$90^\circ \approx 1,57$	$120^\circ \approx 2,09$	$150^\circ \approx 2,62$	$180^\circ \approx 3,14$
r	0	0,01	0,01	0,02	0,03	0,05	0,09
φ	$210^\circ \approx 3,67$	$240^\circ \approx 4,19$	$270^\circ \approx 4,71$	$300^\circ \approx 5,24$	$330^\circ \approx 5,76$	$360^\circ \approx 6,28$	
r	0,16	0,26	0,45	0,75	1,27	2,14	

Изобразим круг радиусом $r(6,28)=2,14 \approx 2$, разделенный на доли в 30° . И нанесем полученные значения.



Практическая часть:

Заполните таблицу данными с помощью калькулятора и постройте спираль в полярной

системе координат, где $a = \frac{\sqrt{n}}{500}$, где n – остаток от деления на 5 порядкового номера.

Данные округлить до сотых.

φ	0	$30^\circ \approx 0,52$	$60^\circ \approx 1,05$	$90^\circ \approx 1,57$	$120^\circ \approx 2,09$	$150^\circ \approx 2,62$	$180^\circ \approx 3,14$
r							
φ	$210^\circ \approx 3,67$	$240^\circ \approx 4,19$	$270^\circ \approx 4,71$	$300^\circ \approx 5,24$	$330^\circ \approx 5,76$	$360^\circ \approx 6,28$	
r							

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретического части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Раздел 3. Прямые и плоскости в пространстве

Практическая работа. Угол между прямыми

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решать задачи на нахождение угла между прямыми в пространстве.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

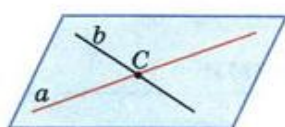
Итак, возможны три случая взаимного расположения двух прямых в пространстве:

а) прямые пересекаются, т. е. имеют только одну общую точку (рис. 21, а);

б) прямые параллельны, т. е. лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 21, б);

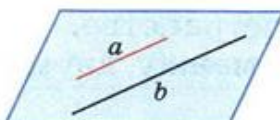
в) прямые скрещиваются, т. е. не лежат в одной плоскости (рис. 21, в).

Докажем еще одну теорему о скрещивающихся прямых.



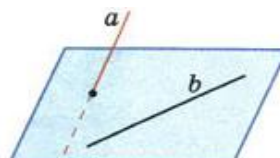
а)

Пересекающиеся прямые



б)

Параллельные прямые



в)

Скрещивающиеся прямые

Рис. 21

Любые две пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и образуют четыре неразвернутых угла. Если известен один из этих углов, то можно найти и другие три угла (рис. 26). Пусть α — тот из углов, который не превосходит любого из трех остальных углов. Тогда говорят, что угол между пересекающимися прямыми равен α . Очевидно, $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$.

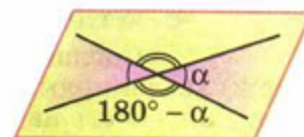


Рис. 26

Практическая часть:

Решите задачи:

1 Основание AD трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α . Через вершины B и C трапеции проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках E и F соответственно.

а) Каково взаимное расположение прямых EF и AB ?

б) Чему равен угол между прямыми EF и AB , если $\angle ABC = 150^\circ$? Ответ обоснуйте.

2 Треугольники ABC и ADC лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону AC . Точка P — середина стороны AD , точка K — середина DC .

а) Каково взаимное расположение прямых PK и AB ?

б) Чему равен угол между прямыми PK и AB , если $\angle ABC = 40^\circ$ и $\angle BCA = 80^\circ$? Ответ обоснуйте.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

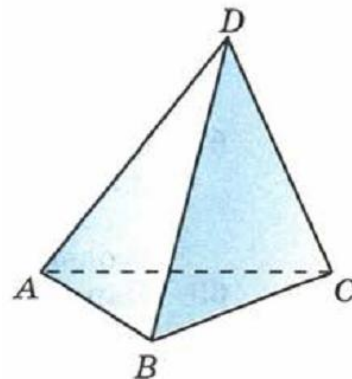
Практическая работа. Тетраэдр

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться решать задачи на нахождение различных измерений в тетраэдре.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Треугольники, из которых состоит тетраэдр, называются **гранями**, их стороны — **ребрами**, а вершины — **вершинами тетраэдра**. Тетраэдр имеет четыре грани, шесть ребер и четыре вершины. Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются **противоположными**. На рисунке противоположными являются ребра AD и BC , BD и AC , CD и AB . Иногда выделяют одну из граней тетраэдра и называют ее **основанием**, а три другие — **боковыми гранями**.



Подсказка! Напоминаю теоремы.

T1. Если прямая параллельна какой нибудь прямой лежащей в плоскости не содержащей эту прямую, то эта прямая параллельна этой плоскости.

T2. Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны.

Практическая часть:

Решите задачи:

1. Назовите все пары скрещивающихся (т. е. принадлежащих скрещивающимся прямым) ребер тетраэдра $ABCD$. Сколько таких пар ребер имеет тетраэдр?
2. Точки M и N — середины ребер AB и AC тетраэдра $ABCD$. Докажите, что прямая MN параллельна плоскости BCD .
3. Через середины ребер AB и BC тетраэдра $SABC$ проведена плоскость параллельно ребру SB . Докажите, что эта плоскость пересекает грани SAB и SBC по параллельным прямым.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

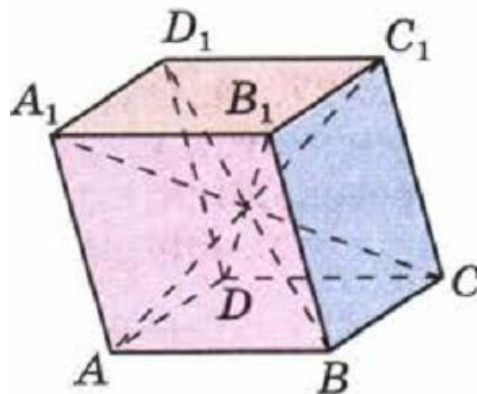
Практическая работа. Параллелепипед

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться решать задачи на нахождение различных измерений в параллелепипеде.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называются **гранями**, их стороны — **ребрами**, а вершины параллелограммов — **вершинами параллелепипеда**. Параллелепипед имеет **шесть граней, двенадцать ребер и восемь вершин**. Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются **смежными**, а не имеющие общих ребер — **противоположными**. На рисунке противоположными являются грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 и DCC_1D_1 , ADD_1A_1 и BCC_1B_1 . Две вершины, не принадлежащие одной грани, называются **противоположными**. Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется **диагональю параллелепипеда**. Каждый параллелепипед имеет четыре диагонали. На рисунке диагоналями являются отрезки AC_1 , BD_1 , CA_1 , и DB_1 .



Часто выделяют какие-нибудь две противоположные грани и называют их **основаниями**, а остальные грани — **боковыми гранями параллелепипеда**. Ребра параллелепипеда, не принадлежащие основаниям, называются **боковыми ребрами**.

Свойства параллелепипеда.

1. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.
- 2 . Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Сумма всех ребер параллелепипеда находится по формуле: $S=4(a+b+c)$.

Практическая часть:

Решите задачи:

1. Сумма всех ребер параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 120 см. Найдите каждое ребро параллелепипеда, если $AB : BC = 4:5$, $BC : BB_1 = 5 : 6$.
2. Изобразите параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и постройте его сечение: а) плоскостью ABC_1 ; б) плоскостью ACC_1 . Докажите, что построенные сечения являются параллелограммами.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Решение задач на построение сечений

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решать задачи на построение сечений.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Для решения многих геометрических задач, связанных с тетраэдром и параллелепипедом, полезно уметь строить на рисунке их сечения различными плоскостями. Уточним, что понимается под сечением тетраэдра или параллелепипеда. Назовем **секущей плоскостью** тетраэдра (параллелепипеда) любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (параллелепипеда). Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра (параллелепипеда) по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется сечением тетраэдра (параллелепипеда). Так как тетраэдр имеет четыре грани, то его сечениями могут быть только треугольники и четырехугольники. Параллелепипед имеет шесть граней. Его сечениями могут быть треугольники, четырехугольники, пятиугольники и шестиугольники.

При построении сечений в параллелепипеде обращаем внимание на то, противоположные стороны сечения параллельны.

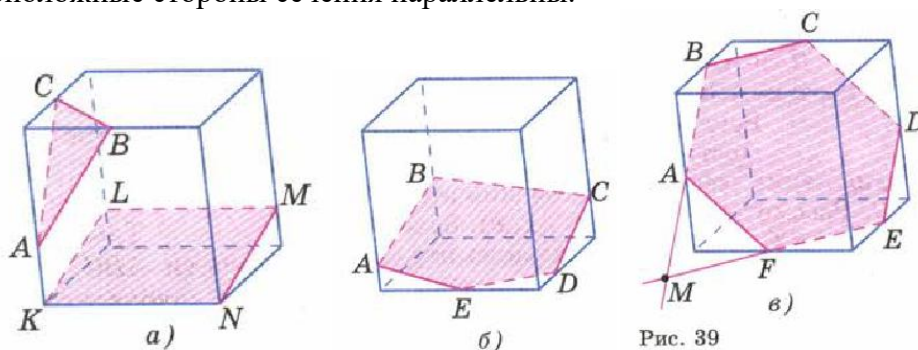
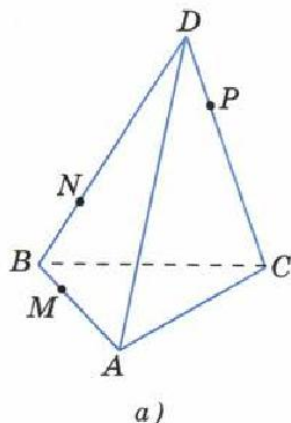


Рис. 39

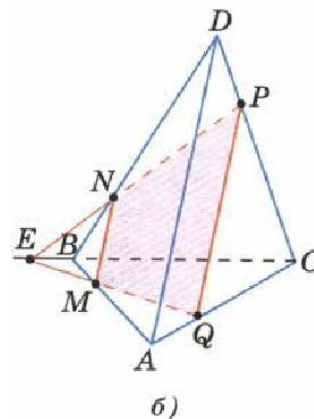
Пример:

На ребрах AB , BD и CD тетраэдра $ABCD$ отмечены точки M , N и P (рис. а). Построить сечение тетраэдра плоскостью MNP .



Построение:

1. $M \in AB$, $N \in BD$, $P \in DC$;
2. $E \in (ABC)$, $E = NP \cap BC$;
3. $Q = EM \cap AC$. $MNPQ$ – искомое сечение (рис. б).



Практическая часть:

Решите задачи на построение:

- 1 Изобразите тетраэдр $DABC$ и на ребрах DB , DC и BC отметьте соответственно точки M , N и K . Постройте точку пересечения: а) прямой MN и плоскости ABC ; б) прямой KN и плоскости ABD .
- 2 Изобразите тетраэдр $DABC$ и постройте сечение этого тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости грани ABC , если: а) точка M является серединой ребра AD ; б) точка M лежит внутри грани ABD .
- 3 Изобразите параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через: а) ребро CC_1 и точку пересечения диагоналей грани $AA_1 D_1 D$; б) точку пересечения диагоналей грани $ABCD$ параллельно плоскости $AB_1 C_1$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Перпендикуляр и наклонная к плоскости

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться решать задачи с использованием понятий перпендикуляр и наклонная к плоскости, угол между прямой и плоскостью.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Отрезок $АН$ называется **перпендикуляром**, проведенным из точки A к плоскости a , а точка H — **основанием перпендикуляра**. Отметим в плоскости a какую-нибудь точку M , отличную от H , и проведем отрезок AM . Он называется **наклонной**, проведенной из точки A к плоскости a , а точка M — **основанием наклонной**.

Отрезок HM называется **проекцией наклонной на плоскость a** . Сравним перпендикуляр $АН$ и наклонную AM : в прямоугольном треугольнике AMH сторона $АН$ — катет, а сторона AM — гипотенуза, поэтому $АН < AM$.

Итак, **перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости.**

Длина перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости a , называется **расстоянием от точки A до плоскости a** .

Замечания

1. Расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется **расстоянием между параллельными плоскостями**.
2. Расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется **расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью**.
3. Расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой, называется **расстоянием между скрещивающимися прямыми**.

Практическая часть:

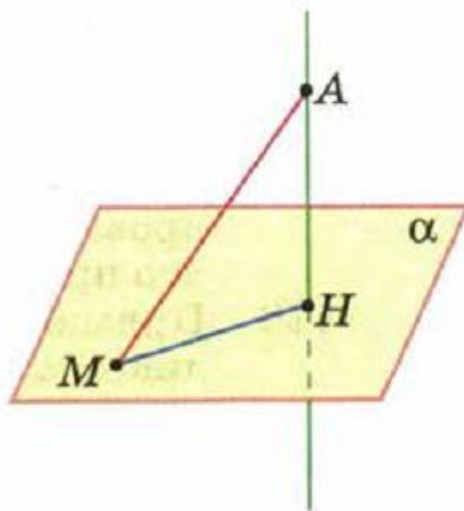
Решите задачи:

1. Из точки A , не принадлежащей плоскости a , проведены к этой плоскости перпендикуляр $АО$ и две равные наклонные AB и AC . Известно, что $\angle OAB = \angle BAC = 60^\circ$, $АО = 1,5$ см. Найдите расстояние между основаниями наклонных.
2. Один конец данного отрезка лежит в плоскости a , а другой находится от нее на расстоянии 6 см. Найдите расстояние от середины данного отрезка до плоскости a .
3. Концы отрезка отстоят от плоскости a на расстояниях 1 см и 4 см. Найдите расстояние от середины отрезка до плоскости a .

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.



Практическая работа. Угол между прямой и плоскостью

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться решать задачи с использованием понятия угла между прямой и плоскостью.

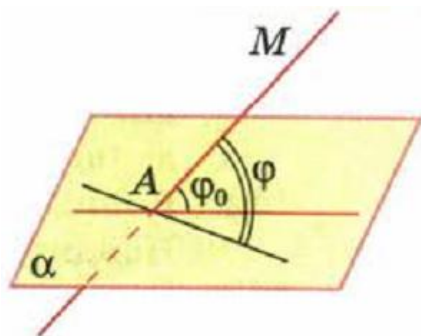
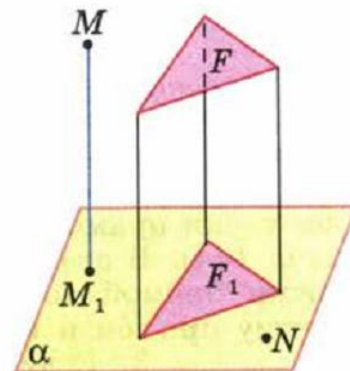
Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости.

На рисунке точка M , проекция точки M на плоскость α , а N — проекция самой точки N на ту же плоскость ($N \in \alpha$).

Обозначим буквой F какую-нибудь фигуру в пространстве. Если мы построим проекции всех точек этой фигуры на данную плоскость, то получим фигуру F_1 , которая называется проекцией фигуры F на данную плоскость. На рисунке треугольник F_1 — проекция треугольника F на плоскость α .



Утверждение

Проекция прямой на плоскость, не перпендикулярная к этой прямой, является прямой.

Определение

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Практическая часть:

Решите задачи:

1. Наклонная AM , проведенная из точки A к данной плоскости, равна d . Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если угол между прямой AM и данной плоскостью равен: а) 45° ; б) 60° ; в) 30° ?
2. Под углом ϕ к плоскости α проведена наклонная. Найдите ϕ , если известно, что проекция наклонной вдвое меньше самой наклонной.
3. Из точки A , удаленной от плоскости α на расстояние d , проведены к этой плоскости наклонные AB и AC под углом 30° к плоскости. Их проекции на плоскость образуют угол в 120° . Найдите BC .

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Признаки и свойства параллельных и перпендикулярных плоскостей

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решать задачи с использованием признаков и свойств параллельных и перпендикулярных плоскостей.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

1. Признак перпендикулярности двух плоскостей

Определение Две пересекающиеся плоскости называются **перпендикулярными** (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90° .

Обозначение: $\perp$.

Теорема Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие **плоскости перпендикулярны**.

Следствие Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.

2. Параллельные плоскости

Определение Две плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.

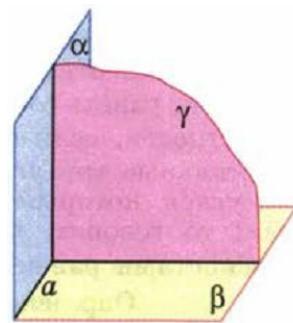
Обозначение: $\parallel$.

Теорема

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти **плоскости параллельны**.

Свойства параллельных плоскостей:

1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.
2. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.



Практическая часть:

Решите задачи:

1. Двугранный угол равен ϕ . На одной грани этого угла лежит точка, удаленная на расстояние d от плоскости другой грани. Найдите расстояние от этой точки до ребра двугранного угла.
2. Из вершины B треугольника ABC , сторона AC которого лежит в плоскости a , проведен к этой плоскости перпендикуляр BB_1 . Найдите расстояния от точки B до прямой AC и до плоскости a , если $AB = 2$ см, $\angle BAC = 150^\circ$ и двугранный угол $BACB_1$ равен 45° .
3. Точка B не лежит в плоскости треугольника ADC , точки M , N и P — середины отрезков BA , BC и BD соответственно.
 - а) Докажите, что плоскости MNP и ADC параллельны.
 - б) Найдите площадь треугольника MNP , если площадь треугольника ADC равна 48 см^2 .

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Раздел 4. Комбинаторика

Практическая работа. Правило произведения. Перестановки

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: запомнить формулы для нахождения числа перестановок, закрепить умение применения правил произведения при решении задач.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Правило произведения.

Если существует m вариантов выбора первого элемента и для каждого из них имеется n вариантов выбора второго элемента, то всего существует $m \cdot n$ различных пар с выбранными таким образом первым и вторым элементами.

Пример 1. Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3?

Решение: $m = 3, n = 4; m \cdot n = 12$.

Пример 2. Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3?

Решение: $m=3, n=4, k=4; mnk=3 \cdot 4 \cdot 4=48$.

Пример 3. Сколько различных пятибуквенных слов можно записать с помощью букв «и» и «л»?

Решение: $a = 2, b = 2, c = 2, d = 2, f=2; abcdf = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5=32$.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называют **n - факториалом** и пишут $n!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

Пример. Вычислить: а) $3!$; б) $7! \cdot 5!$; в) $\frac{7! \cdot 5!}{6!}$.

Решение. а) $3!=1 \cdot 2 \cdot 3=6$.

б) Так как $7!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ и $5!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, то можно вынести за скобки $5!$

Тогда получим

$$5!(6 \cdot 7 \cdot 1) = 5! \cdot 42 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 42 = 120 \cdot 42 = 5040.$$

$$\text{в) } \frac{7! \cdot 5!}{6!} = \frac{5!(6 \cdot 7 \cdot 1)}{5! \cdot 6} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 1}{6} = \frac{42}{6} = 7.$$

Перестановки.

Комбинация из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются перестановками.

Перестановки обозначаются символом P_n , где n - число элементов, входящих в каждую перестановку. (P - первая буква французского слова permutation- перестановка).

Число перестановок можно вычислить по формуле $P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ или с помощью факториала: $P_n = n!$.

Запомним, что $0!=1$ и $1!=1$.

Пример. Сколькими способами можно расставлять на одной полке шесть различных книг?

Решение. Искомое число способов равно числу перестановок из 6 элементов, т.е.

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Практическая часть:

Решите задачи:

1. В классе 18 учащихся. Из их числа нужно выбрать физорга, культорга и казначея.

Сколькими способами это можно сделать, если один ученик может занимать не более одной должности?

2. В классе 20 учащихся. Необходимо назначить по одному дежурному в столовую, вестибюль и спортивный зал. Сколькими способами это можно сделать?
3. Сколько различных пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр и кратных 5, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 и 5?
4. Сколько различных шестизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр и кратных 4, можно записать с помощью цифр 1, 3, 5, 6, 7 и 9?
5. Решить уравнение относительно n :

$$1) \frac{P_n}{P_{n+1}} = \frac{1}{4}; \quad 2) \frac{P_{n+2}}{P_{n+1}} = 5$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Размещения

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение применения формул для нахождения размещений в ходе решения задач.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Размещения.

Размещениями из m элементов в n в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком их расположения.

Размещения обозначаются символом A_n^m , где n - число всех имеющихся элементов, m - число элементов в каждой комбинации. (А-первая буква французского слова arrangement, что означает «размещение, приведение в порядок»).

При этом полагают, что $n \geq m$.

Число размещений можно вычислить по формуле $A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)$,

т.е. число всех возможных размещений из n элементов по m равно произведению m последовательных целых чисел, из которых большее есть n .

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Запишем эту формулу в факториальной форме:

Пример. Сколько вариантов распределения трех путевок в санатории различного профиля можно составить для пяти претендентов?

Решение. Искомое число вариантов равно числу размещений из 5 элементов по 3 элемента, т.е. $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Практическая часть:

Решите задачи:

1. В шахматном турнире участвуют 5 юношей и 3 девушки. Сколькими способами могут распределиться места среди девушек, если все участники турнира набирают разное количество очков.

2. Найти значение выражения:

$$1) \frac{A_{18}^{10} + A_{18}^{11}}{A_{18}^9}, \quad 2) \frac{A_5^5 \cdot A_{10}^3}{A_9^7}.$$

3. Решить относительно m уравнение:

$$1) A_m^2 = 56; \quad 2) A_m^3 = 20m; \quad 3) A_m^2 + 2 = 90.$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Сочетания их свойства

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение применения формул для нахождения числа сочетаний в ходе решения задач.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Сочетания.

Сочетаниями называются все возможные комбинации из n элементов по m , которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом (здесь m и n – натуральные числа, причем $n \geq m$).

Число сочетаний из n элементов по m обозначаются C_n^m (С-первая буква французского слова combination – сочетание).

В общем случае число из n элементов по m равно числу размещений из n элементов

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}.$$

по m , деленному на число перестановок из m элементов:

Используя для чисел размещений и перестановок факториальные формулы, получим:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}.$$

Пример. В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Так как порядок выбранных четырех человек не имеет значения, то это можно

сделать C_{25}^4 способами. Находим по первой формуле $C_{25}^4 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12650$.

Свойство 1. $C_m^n = C_m^{m-n}$.

Свойство 2 (рекуррентное свойство).

$$C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}.$$

Пример:

Найти значение выражения $C_{20}^{18} + C_{20}^{19}$.

Воспользуемся свойством 2, получим $C_{20}^{18} + C_{20}^{19} = C_{21}^{19}$. По формуле (2) имеем

$$C_{21}^{19} = \frac{21!}{(21-19)! \cdot 19!} = \frac{21!}{2! \cdot 19!} = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210.$$

Практическая часть:

Решите задачи:

1. В школьном хоре 7 девочек и 4 мальчика. Сколькими способами из состава хора можно выбрать для участия в районном смотре 4 девочек и 3 мальчиков?
2. Найти значение выражения, предварительно его упростив:
 - 1) $C_{14}^{12} + C_{14}^{13}$;
 - 2) $C_{21}^3 - C_{20}^3$;
 - 3) $C_{71}^3 - C_{70}^2$.
3. Решить уравнение:
 - 1) $C_{x-1}^3 + C_{x-1}^2 = 4(x-1)$;
 - 2) $5C_x^3 = C_{x+2}^4$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Решение комбинаторных задач

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить формулы для нахождения числа перестановок, числа размещений и числа сочетаний в ходе решения задач.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

В разделе математики, который называется комбинаторикой, решаются некоторые задачи, связанные с рассмотрением множеств и составлением различных комбинаций из элементов этих множеств. Например, если взять 10 различных цифр 0, 1, 2, 3, ..., 9 и составлять из них комбинации, то будем получать различные числа, например 143, 431, 5671, 1207, 43 и т.п.

Мы видим, что некоторые из таких комбинаций отличаются только порядком цифр (например, 143 и 431), другие - входящими в них цифрами (например, 5671 и 1207), третьи различаются и числом цифр (например, 143 и 43).

Таким образом, полученные комбинации удовлетворяют различным условиям.

В зависимости от правил составления можно выделить три типа комбинаций: **перестановки, размещения, сочетания**.

Предварительно познакомимся с понятием **факториала**.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называют **n - факториалом** и пишут $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

Пример. Вычислить: а) $3!$; б) $7! \cdot 5!$; в) $\frac{7! \cdot 5!}{6!}$.

Решение. а) $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

б) Так как $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ и $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, то можно вынести за скобки $5!$

Тогда получим

$$5!(6 \cdot 7 \cdot 1) = 5!41 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 41 = 120 \cdot 41 = 4920.$$

$$\text{в) } \frac{7! \cdot 5!}{6!} = \frac{5!(6 \cdot 7 \cdot 1)}{5!6} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 1}{6} = \frac{43}{6}.$$

Перестановки.

Комбинация из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются перестановками.

Перестановки обозначаются символом P_n , где n - число элементов, входящих в каждую перестановку. (P - первая буква французского слова permutation - перестановка).

Число перестановок можно вычислить по формуле $P_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ или с помощью факториала: $P_n = n!$.

Запомним, что $0! = 1$ и $1! = 1$.

Пример. Сколькими способами можно расставлять на одной полке шесть различных книг?

Решение. Искомое число способов равно числу перестановок из 6 элементов, т.е.

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Размещения.

Размещениями из m элементов в n в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком из расположения.

Размещения обозначаются символом A_n^m , где n - число всех имеющихся элементов, m - число элементов в каждой комбинации. (A - первая буква французского слова arrangement, что означает «размещение, приведение в порядок»).

При этом полагают, что $n \geq m$.

Число размещений можно вычислить по формуле $A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)$,

т.е. число всех возможных размещений из n элементов по m равно произведению m последовательных целых чисел, из которых большее есть n .

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Запишем эту формулу в факториальной форме:

Пример. Сколько вариантов распределения трех путевок в санатории различного профиля можно составить для пяти претендентов?

Решение. Искомое число вариантов равно числу размещений из 5 элементов по 3 элемента, т.е. $A_n^m = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Сочетания.

Сочетаниями называются все возможные комбинации из n элементов по m , которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом (здесь m и n – натуральные числа, причем $n \geq m$).

Число сочетаний из n элементов по m обозначаются C_n^m (С-первая буква французского слова combination – сочетание).

В общем случае число из n элементов по m равно числу размещений из n элементов

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}.$$

по m , деленному на число перестановок из m элементов:

Используя для чисел размещений и перестановок факториальные формулы, получим:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}.$$

Пример. В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Так как порядок выбранных четырех человек не имеет значения, то это можно сделать C_{25}^4 способами.

$$C_{25}^4 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12650.$$

Находим по первой формуле

Практическая часть:

1. В соревнованиях участвовало четыре команды. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно?
2. На факультете изучается 16 предметов. На понедельник нужно в расписание поставить 3 предмета. Сколькими способами можно это сделать?
3. Из 15 объектов нужно отобрать 10 объектов. Сколькими способами это можно сделать?
4. Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера?
5. Найти x , если известно, что $C_{x-2}^2 = 21$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Раздел 5. Координаты и векторы

Практическая работа. Центральное проектирование

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться решать задачи на построение с применением центрального проектирования.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Изображение предметов на плоскости получают различными способами: рисованием, фотографированием и черчением. Любое изображение строят **методом проекций**. Проекция — это изображение предмета на плоскости, полученное посредством лучей — проектирующих прямых.

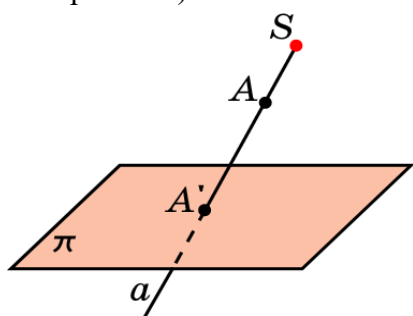
Проекция — от латинского *projection* — бросок вперед.

Различают два вида проектирования: **центральное** и **параллельное**.

Центральное проектирование

Само восприятие человеком окружающих предметов посредством зрения осуществляется по законам центрального проектирования.

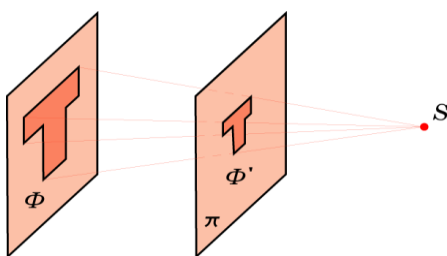
Однако центральное проектирование искажает одно из основных отношений геометрии – параллельность (например, нам кажется, что железнодорожные пути сливаются на горизонте)



Пусть π — некоторая плоскость, S — не принадлежащая ей точка, центр проектирования. Для точки A пространства проведем прямую a , соединяющую эту точку с точкой S . Точка пересечения этой прямой с плоскостью π называется центральной проекцией точки A на плоскость π . Обозначим ее A' . Соответствие, при котором точкам A пространства сопоставляются их центральные проекции A' , называется центральным проектированием или перспективой.

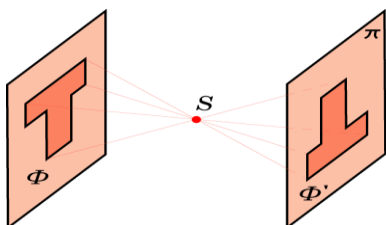
Перспектива 1

Центральное проектирование плоской фигуры Φ на плоскость, находящуюся между плоскостью фигуры Φ и центром проектирования S .



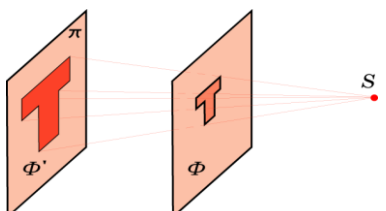
Перспектива 2

Центральное проектирование плоской фигуры Φ в случае, когда центр проектирования S расположен между плоскостью фигуры Φ и плоскостью проектирования.



Перспектива 3

Центральное проектирование плоской фигуры Φ в случае, когда плоскость фигуры Φ расположена между плоскостью проектирования и центром проектирования S .



Практическая часть:**Задание 1**

Изобразите фигуру Φ' при центральном проектировании квадрата на плоскость, находящуюся между плоскостью треугольника в 3 раза большем центре проектирования S .

Задание 2

Изобразите фигуру Φ' при центральном проектировании равностороннего треугольника в случае, когда центр проектирования S расположен между плоскостью фигуры Φ и плоскостью проектирования.

Задание 3

Изобразите фигуру Φ' при центральном проектировании равностороннего шестиугольника в случае, когда равносторонний шестиугольник расположен между плоскостью проектирования и центром проектирования S . Расстояние от центра проектирования S до Φ' в 3 раза больше чем до Φ .

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Аксонометрические проекции плоских предметов

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться строить аксонометрические проекции плоских предметов.

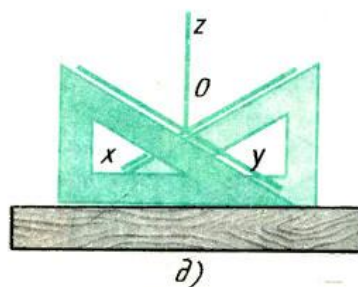
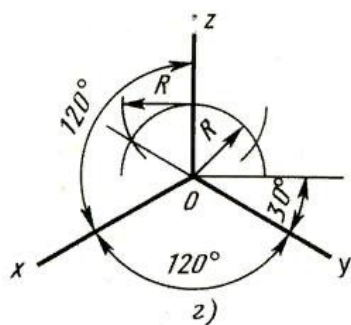
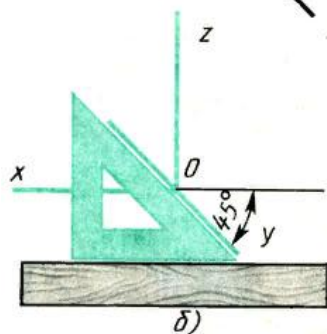
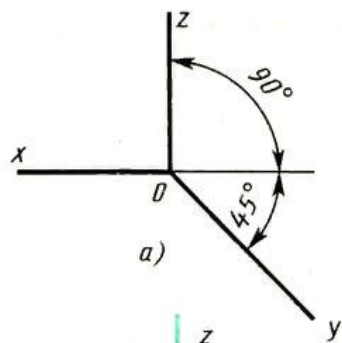
Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Построение аксонометрических проекций начинают с проведения аксонометрических осей.

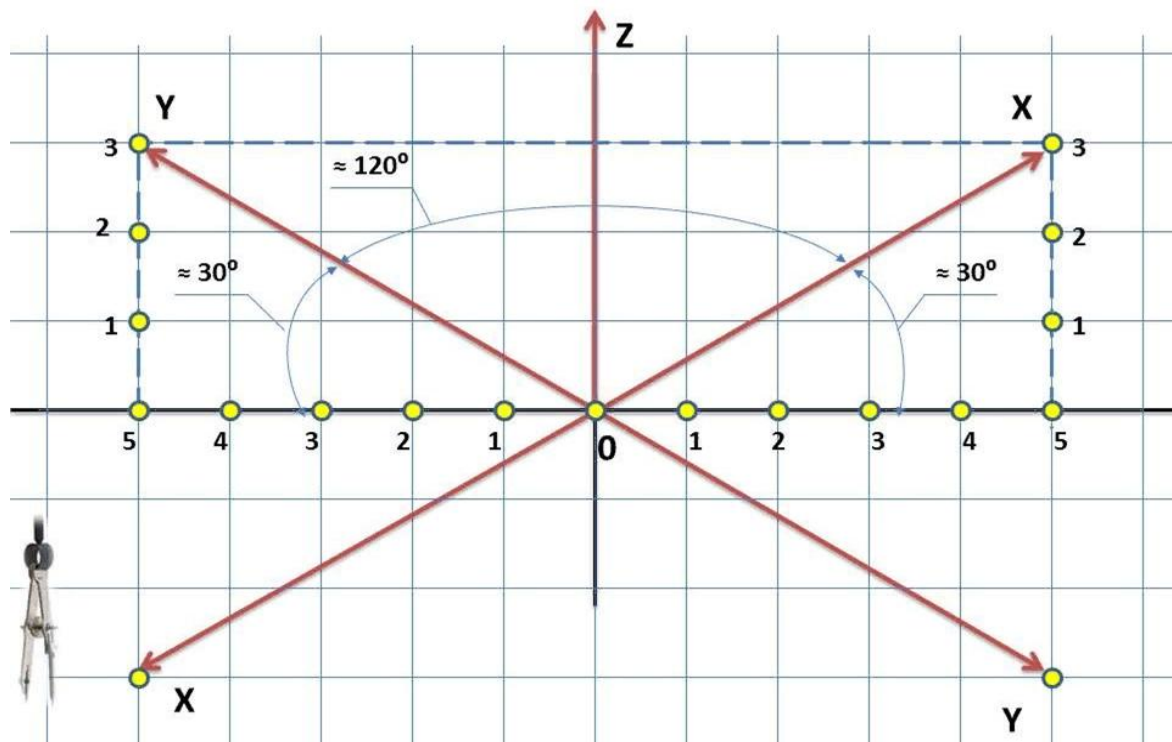
Положение осей

Оси фронтальной диметрической проекции располагают, как показано на рис. 85, а: ось x - горизонтально, ось z - вертикально, ось y - под углом 45° к горизонтальной линии. Угол 45° можно построить при помощи чертежного угольника с углами 45 , 45 и 90° , как показано на рис. б. Положение осей изометрической проекции показано на рис. г. Оси x и y располагают под углом 30° к горизонтальной



линии (угол 120° между осями). Построение осей удобно проводить при помощи угольника с углами 30 , 60 и 90° (рис. д).

Построение осей в изометрической проекции



Построение аксонометрической проекции треугольника показано на рис. 1, а и б. Симметрично точке О (началу осей координат) по оси х откладывают половину стороны треугольника $a/2$, а по оси у - его высоту h (для фронтальной диметрической проекции половину высоты $h/2$). Полученные точки соединяют отрезками прямых.

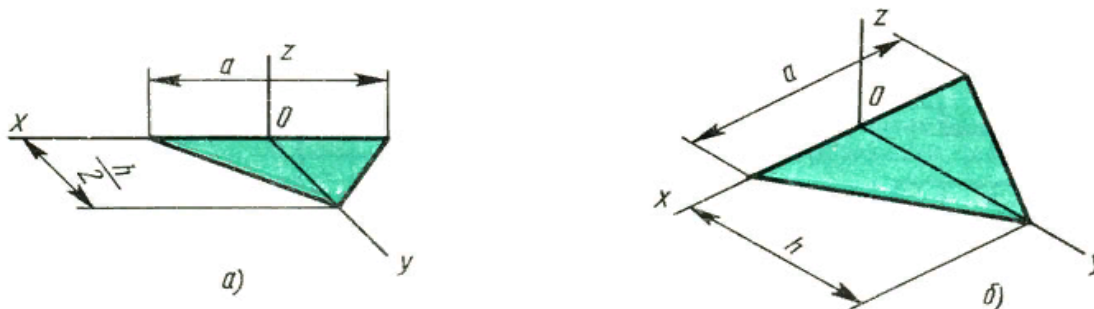


Рис. 1. Аксонометрические проекции треугольника:
а - фронтальная диметрическая; б - изометрическая

Построение аксонометрической проекции квадрата показано на рис. 2, а и б. Вдоль оси х откладывают сторону квадрата a , вдоль оси у - половину стороны $a/2$ для фронтальной диметрической проекции и сторону a для изометрической проекции. Концы отрезков соединяют прямыми.

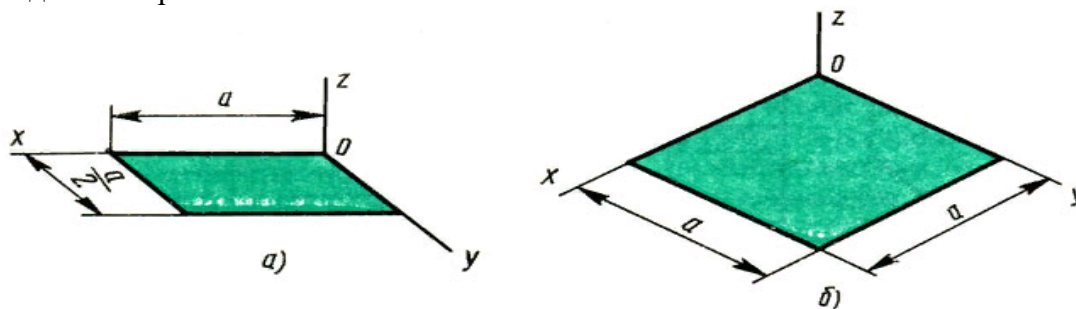


Рис. 2. Аксонометрические проекции квадрата:
а - фронтальная диметрическая; б - изометрическая

Построение аксонометрической проекции правильного шестиугольника показано на рис. 3. По оси х вправо и влево от точки О откладывают отрезки, равные стороне шестиугольника. По оси у симметрично точке О откладывают отрезки $s/2$, равные половине расстояния между противоположными сторонами шестиугольника (для фронтальной диметрической проекции эти отрезки уменьшают вдвое). От точек m и n , полученных на оси у, проводят вправо и влево параллельно оси х отрезки, равные половине стороны шестиугольника. Полученные точки соединяют отрезками прямых.

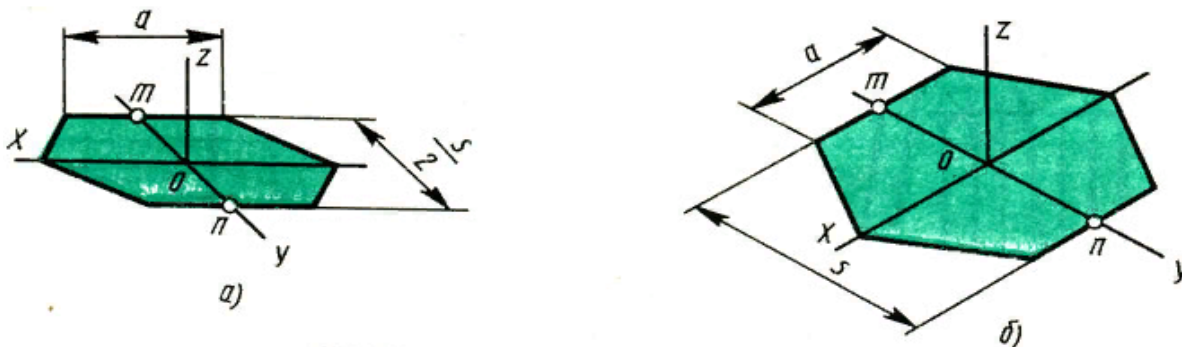


Рис. 3. Аксонометрические проекции квадрата:
а - фронтальная диметрическая; б - изометрическая

Практическая часть

Задание № 1

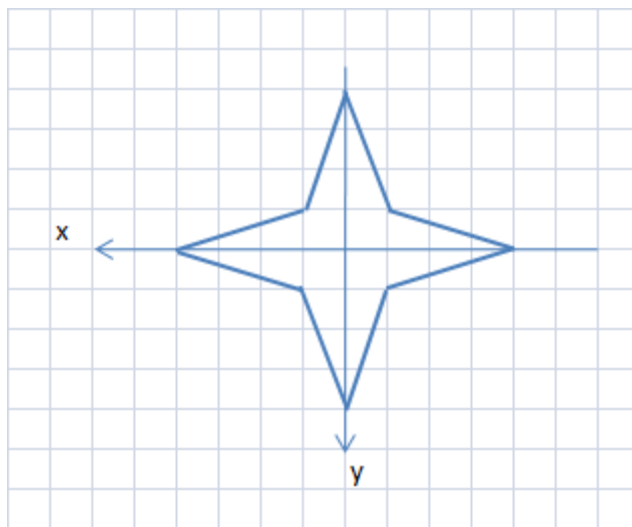
- 1) Проведите оси фронтальной диметрической проекции и изометрической проекции.
- 2) Постройте квадрат (со стороной $a = 30$ мм) в диметрии и изометрии. При построении проекций квадрата его стороны расположены параллельно осям, в плоскости XZ (фронтальная) нет искажения, в плоскостях XY (горизонтальная) и ZY (профильная) по оси Y размер стороны квадрата уменьшаем в два раза.

Задание № 2

- 1) Проведите оси фронтальной диметрической проекции и изометрической проекции.
- 2) Построение равнобедренного треугольника ($a = 30$, $h = 40$) в диметрии и изометрии. При построении проекции равнобедренного треугольника в плоскости XZ (фронтальная) его основание параллельно оси X , а высота треугольника параллельна оси Z , в плоскостях XY (горизонтальная) и ZY (профильная) по оси Y размер основания и высоты равнобедренного треугольника уменьшаем в два раза.

Задание № 3

Постройте фронтальную диметрическую и изометрическую проекции детали, приведенной на рисунке.



Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Векторы. Действия с векторами

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: познакомиться с ПДСК и понятием вектора в пространстве.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Если через точку пространства проведены три попарно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрано направление (оно обозначается стрелкой) и выбрана единица измерения отрезков, то говорят, что задана **прямоугольная система координат в пространстве** (рис.). Прямые с выбранными на них направлениями называются **осями координат**, а их общая точка — **началом координат**. Она обозначается обычно буквой O . Оси координат обозначаются так: Ox , Oy , Oz — и имеют названия: **ось абсцисс**, **ось ординат**, **ось аппликат**. Вся система координат обозначается $Oxyz$. Плоскости, проходящие соответственно через оси координат Ox и Oy , Oy и Oz , Oz и Ox , называются **координатными плоскостями** и обозначаются Oxy , Oyz , Oxz .

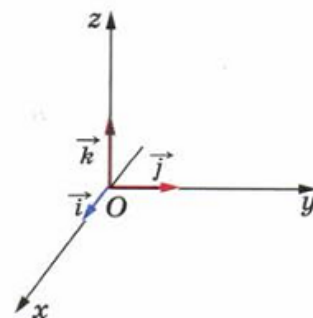


Точка O разделяет каждую из осей координат на два луча. Луч, направление которого совпадает с направлением оси, называется **положительной полуосью**, а другой луч — **отрицательной полуосью**.

В прямоугольной системе координат каждой точке M пространства сопоставляется тройка чисел, которые называются ее **координатами**.

Зададим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. На каждой из положительных полуосей отложим от начала координат единичный вектор, т. е. вектор, длина которого равна единице.

Обозначим через $\vec{i}$ единичный вектор оси абсцисс, через $\vec{j}$ — единичный вектор оси ординат и через $\vec{k}$ — единичный вектор оси аппликат (рис.). Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ назовем **координатными векторами**. Очевидно, эти векторы не компланарны. Поэтому любой вектор $\vec{a}$ можно разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,



причем коэффициенты разложения x , y , z определяются единственным образом.

Коэффициенты x , y и z в разложении вектора $\vec{a}$ по координатным векторам называются **координатами вектора $\vec{a}$ в данной системе координат**. Координаты вектора $\vec{a}$ будем записывать в фигурных скобках после обозначения вектора: $\vec{a} \{x; y; z\}$.

Координаты равных векторов соответственно равны.

Практическая часть:

- Даны точки $A(8; -1; 0)$, $B(0; 0; -7)$, $C(2; 0; 0)$, $D(-4; 0; 3)$, $E(0; -1; 0)$, $F(1; 2; 3)$, $G(0; 5; -7)$, $H(-\sqrt{5}; \sqrt{3}; 0)$. Какие из этих точек лежат на: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) оси аппликат; г) плоскости Oxy ; д) плоскости Oyz ; е) плоскости Oxz ?
- Найдите координаты проекций точек $A(2; -3; 5)$, $B(3; -5; 0,5)$ и $C(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{5} - \sqrt{3})$ на: а) координатные плоскости Oxz , Oxy и Oyz ; б) оси координат Ox , Oy и Oz .

- 3 Запишите координаты векторов: $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$,
 $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{d} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{m} = \vec{k} - \vec{i}$, $\vec{n} = 0,7\vec{k}$.
- 4 Даны векторы $\vec{a} \{5; -1; 2\}$, $\vec{b} \{-3; -1; 0\}$, $\vec{c} \{0; -1; 0\}$, $\vec{d} \{0; 0; 0\}$. Запишите разложения этих векторов по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Действия с векторами, заданными координатами

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться использовать правила действия с векторами заданными координатами.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Правила действия с векторами заданными координатами.

1. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих

координат этих векторов. Другими словами, если $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$ — данные векторы, то вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$.

2. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих

координат этих векторов. Другими словами, если $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$ — данные векторы, то вектор $\vec{a} - \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$.

3. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число. Другими словами, если $\vec{a} \{x; y; z\}$ — данный вектор, α — данное число, то вектор $\alpha\vec{a}$ имеет координаты $\{\alpha x; \alpha y; \alpha z\}$.

Задача

Найти координаты вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$,

если $\vec{a} \{1; -2; 0\}$, $\vec{b} \{0; 3; -6\}$, $\vec{c} \{-2; 3; 1\}$.

Решение

По правилу 3⁰ вектор $2\vec{a}$ имеет координаты $\{2; -4; 0\}$, а вектор $\left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right)$ — координаты $\{0; -1; 2\}$. Так как $\vec{p} = (2\vec{a}) + \left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right) + \vec{c}$, то его координаты $\{x; y; z\}$ можно вычислить по правилу 1⁰: $x = 2 + 0 - 2 = 0$, $y = -4 - 1 + 3 = -2$, $z = 0 + 2 + 1 = 3$. Итак, вектор $\vec{p}$ имеет координаты $\{0; -2; 3\}$.

Практическая часть:

1 Даны векторы $\vec{a} \{3; -5; 2\}$, $\vec{b} \{0; 7; -1\}$, $\vec{c} \left\{\frac{2}{3}; 0; 0\right\}$ и $\vec{d} \{-2; 7; 3; 1; 0; 5\}$.

Найдите координаты векторов: а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} + \vec{c}$; в) $\vec{b} + \vec{c}$; г) $\vec{d} + \vec{b}$; д) $\vec{d} + \vec{a}$; е) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; ж) $\vec{b} + \vec{a} + \vec{d}$; з) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.

2 Даны векторы $\vec{a} \{5; -1; 1\}$, $\vec{b} \{-2; 1; 0\}$, $\vec{c} \{0; 0; 2; 0\}$ и $\vec{d} \left\{-\frac{1}{3}; 2\frac{2}{5}; -\frac{1}{7}\right\}$. Найдите координаты векторов: а) $\vec{a} - \vec{b}$; б) $\vec{b} - \vec{a}$; в) $\vec{a} - \vec{c}$; г) $\vec{d} - \vec{a}$; д) $\vec{c} - \vec{d}$; е) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; ж) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$; з) $2\vec{a}$; и) $-3\vec{b}$; к) $-6\vec{c}$; л) $-\frac{1}{3}\vec{d}$; м) $0,2\vec{b}$.

3 Даны векторы $\vec{a} \{-1; 2; 0\}$, $\vec{b} \{0; -5; -2\}$ и $\vec{c} \{2; 1; -3\}$. Найдите координаты векторов $\vec{p} = 3\vec{b} - 2\vec{a} + \vec{c}$ и $\vec{q} = 3\vec{c} - 2\vec{b} + \vec{a}$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

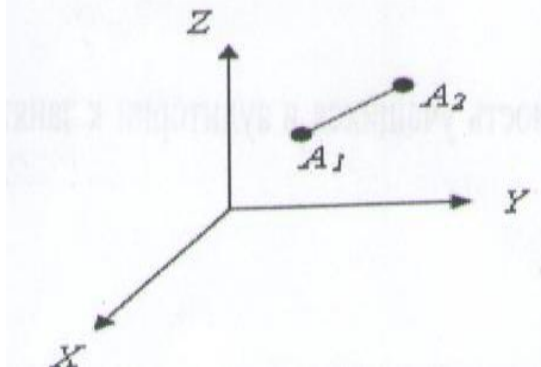
Практическая работа. Простейшие задачи в координатах

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решения задач на нахождение координат середины отрезка и расстояния между двумя точками.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Расстояние между точками в пространстве



Если две произвольные точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $A_2(x_2; y_2; z_2)$. Тогда расстояние между точками A_1 и A_2 вычисляется так: $A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Координаты середины отрезка в пространстве

Если две произвольные точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $A_2(x_2; y_2; z_2)$. Тогда серединой отрезка A_1A_2 вычисляется так: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Если даны координаты центра отрезка и один из концов отрезка, то $x = 2x_2 - x_1$; $y = 2y_2 - y_1$; $z = 2z_2 - z_1$

Практическая часть:

Решите задачи:

1. Даны точки $M(1; 0; -1)$, $N(2; -5; 6)$, $K(x; 0; 2)$. Найдите такое значение x , чтобы выполнялось условие: $|MK| = |NK|$
2. Найдите длину вектора AB , если: а) $A(-1; 0; 2)$, $B(1; -2; 3)$; б) $A(-35; -17; 20)$, $B(-34; -5; 8)$.
3. Даны точки $M(-4; 7; 0)$ и $N(0; -1; 2)$. Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка MN .
4. На каком расстоянии от плоскости Oxy находится точка $A(2; -3; -5)$?
5. На каком расстоянии от начала координат находится точка $A(-3; 4; 0)$?
6. Найдите координаты середины отрезка, если концы его имеют координаты $A(5; 3; 2)$ и $B(3; -1; -4)$.
7. Найдите длину вектора AB , если $A(5; 3; 2)$ и $B(3; -1; -2)$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Скалярное произведение векторов

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: познакомиться со скалярным произведением векторов и научиться использовать данное понятие при решении задач.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a}\vec{b}$.

Таким образом, $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$.

Справедливы следующие утверждения:

1. скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны;
2. скалярный квадрат вектора (т. е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины.

Скалярное произведение векторов $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$ вычисляется по формуле

$$\cos \alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (1)$$

В самом деле, так как $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$, то $\cos \alpha = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Основные свойства скалярного произведения векторов.

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и любого числа k справедливы соотношения:

- 1°. $\vec{a}^2 \geq 0$, причем $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$.
- 2°. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (переместительный закон).
- 3°. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ (распределительный закон).
- 4°. $k(\vec{a}\vec{b}) = (k\vec{a})\vec{b}$ (сочетательный закон).

Практическая часть:

1. Вычислите угол между прямыми AB и CD , если: а) $A(3; -2; 4)$, $B(4; -1; 2)$, $C(6; -3; 2)$, $D(7; -3; 1)$; б) $A(5; -8; -1)$, $B(6; -8; -2)$, $C(7; -5; -11)$, $D(7; -7; -9)$; в) $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(0; -2; -4)$, $D(-2; -4; 0)$; г) $A(-6; -15; 7)$, $B(-7; -15; 8)$, $C(14; -10; 9)$, $D(14; -10; 7)$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Уравнение плоскости

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: познакомиться с записью общего уравнения плоскости и закрепить умение находить расстояние от точки до плоскости.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Пусть задана прямоугольная система координат $Oxyz$ и дана некоторая поверхность F , например плоскость. Уравнение с тремя переменными x, y, z называется **уравнением поверхности F** , если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки поверхности F и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой поверхности. Отметим, что понятие уравнения поверхности аналогично понятию уравнения линии, введенному в курсе планиметрии.

Если точка $M(x; y; z)$, отличная от M_0 , принадлежит плоскости α , то векторы $\vec{n}\{a; b; c\}$ и $M_0M\{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ взаимно перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Данное уравнение является уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярной к ненулевому вектору $\vec{n}\{a; b; c\}$.

Уравнение плоскости можно записать также в виде $ax + by + cz + d = 0$, где $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Таким образом, уравнение плоскости в прямоугольной системе координат является уравнением первой степени.

Для нахождения расстояния от точки до плоскости используем формулу:

$$l = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Практическая часть:

1. Запишите уравнение плоскости $7(x-1)+8(y-1)+9(z+1)=0$ в виде $ax + by + cz + d = 0$.
2. Дан нормальный вектор плоскости $\vec{n}(1,1,1)$ и точка принадлежащая данной плоскости $A(1,2,3)$. Запишите общее уравнение плоскости в виде $ax + by + cz + d = 0$.
3. Найдите расстояние от точки $B(1,5,-1)$ до плоскости $2x+3y-4z=4$.
4. Дан нормальный вектор плоскости $\vec{n}(1,-1,3)$ и точка принадлежащая данной плоскости $A(1,2,3)$ и точка $B(-1; -2; -3)$ не принадлежащая данной плоскости. Найдите расстояние от точки B до данной плоскости.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Раздел 6. Основы тригонометрии

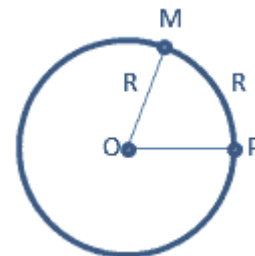
Практическая работа. Радианный метод измерения углов и связь с градусной мерой

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: усвоить определение угла в один радиан, запомнить формулы перехода от градусной меры угла к радианной и от радианной к градусной.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Наравне с градусной мерой угла используется радианная. Возьмем на координатной плоскости окружность с центром в точке O и радиусом R . Отметим на ней дугу PM , длина которой равна R и угол POM . **Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в 1 радиан.**



Градусная мера угла в 1 радиан равна:

Так как дуга длиной πR (полуокружность), стягивает центральный

угол в 180° , то дуга длиной R , стягивает угол в π раз меньший, т.е. $1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$. И

наоборот $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ рад. Так как $\pi = 3,14$, то $1 \text{ рад} = 57,3^\circ$

Если угол содержит a радиан, то его градусная мера равна $a \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot a\right)^\circ$. И

наоборот $a^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot a$ рад. Обычно при обозначении меры угла в радианах наименование

«рад» опускают. Например, $360^\circ = 2\pi$ рад, пишут $360^\circ = 2\pi$

В таблице указаны часто встречающиеся углы в градусной и радианной мере.

Градусы	0	15	30	45	60	75	90	120	135	150	180	270	360
Радианы	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$3\pi/2$	2π

Пример 1.

Найти радианную меру угла равного

а) 40° , б) 120° , в) 105°

Решение

а) $40^\circ = 40 \cdot \pi / 180 = 2\pi/9$

б) $120^\circ = 120 \cdot \pi / 180 = 2\pi/3$

в) $105^\circ = 105 \cdot \pi / 180 = 7\pi/12$

Пример 2.

Найти градусную меру угла выраженного в радианах

а) $\pi/6$, б) $\pi/9$, в) $2 \cdot \pi/3$

Решение

а) $\pi/6 = 180^\circ/6 = 30^\circ$

б) $\pi/9 = 180^\circ/9 = 20^\circ$

в) $2\pi/3 = 2 \cdot 180^\circ/6 = 120^\circ$

Практическая часть:

1. Выразите углы в долях π :

1) 135° ; 2) 200° ; 3) 1200° ; 4) -330° .

2. Переведите углы в градусную меру:

1) $\frac{7\pi}{6}$; 2) $-\frac{41\pi}{15}$; 3) 10π ; 4) $\frac{99\pi}{25}$.

3. Определить в какой четверти лежит данный угол:

1) 500° ; 2) -1290° ; 3) $\frac{19\pi}{3}$;

4) $-\frac{100\pi}{7}$; 5) $2,5$; 6) -7 .

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретического части.

2. Выполнение задания практической части.

3. Оформление вывода.

4. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Контрольные вопросы:

1. Чему равен 1 радиан?

Практическая работа. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса числа

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: формировать умение находить синус, косинус, тангенс и котангенс числа. Определять четверть.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Формулы зависимости между функциями одного и того же аргумента:

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$

2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$

3. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$

4. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$

5. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$

6. $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$

Рассмотрим сначала достаточно простые задания на применение формул тригонометрии.

Пример 1. Вычислить значение $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = 0,3$, α — угол в первой четверти.

Решение

Применим основное тригонометрическое тождество, связывающее тригонометрические

функции $y = \sin \alpha$, $y = \cos \alpha$: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Так как по условию задачи $\cos \alpha = 0,3$, то $\cos^2 \alpha = 0,09$. Значит, $\sin^2 \alpha + 0,09 = 1$, $\sin^2 \alpha = 1 - 0,09 = 0,91$. Решая уравнение $\sin^2 \alpha = 0,91$,

получаем два случая ($\sin \alpha = \sqrt{0,91}$ или $\sin \alpha = -\sqrt{0,91}$), из которых, обращая внимание на то, какой четверти принадлежит искомый угол, следует выбрать один. Вспомним, что в первой четверти все тригонометрические функции имеют знак «+».

Следовательно, $\sin \alpha = \sqrt{0,91}$. Ответ: $\sin \alpha = \sqrt{0,91}$.

Пример 2. Вычислите значение $\operatorname{tg} \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = 0,2$.

Решение

Воспользуемся формулой, связывающей тригонометрические функции

$y = \operatorname{tg} \alpha$, $y = \operatorname{ctg} \alpha$: $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$. Подставляя заданное в условии значение 0,2, получаем, что $\operatorname{tg} \alpha \cdot 0,2 = 1$, откуда $\operatorname{tg} \alpha = 5$.

Ответ: 5.

Пример 3. Найти $\operatorname{tg} \alpha$, если $\frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{\sin \alpha - 2 \cos \alpha} = 5$.

Решение

Проверкой можно убедиться, что при $\cos \alpha = 0$ приведенное равенство неверно. Поэтому следует разделить числитель и знаменатель дроби на $\cos \alpha$ (на основании основного свойства

дроби): $\frac{3 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 4 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 2 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}} = 5$, следовательно, $\frac{3 \operatorname{tg} \alpha + 4}{\operatorname{tg} \alpha - 2} = 5$, тогда: $3 \operatorname{tg} \alpha + 4 = 5(\operatorname{tg} \alpha - 2)$,

раскрывая скобки, приведем далее подобные слагаемые: $3\operatorname{tg} \alpha + 4 = 5\operatorname{tg} \alpha - 10$, $2\operatorname{tg} \alpha = 14$, получаем, что $\operatorname{tg} \alpha = 7$.

Ответ: 7.

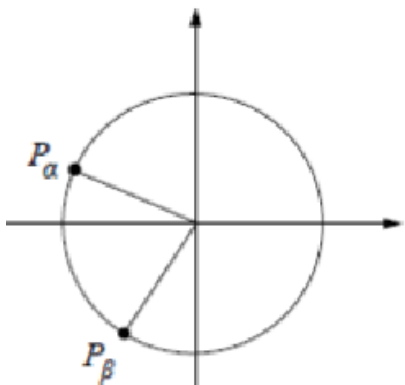
Практическая часть:

1. Дано: $\sin \alpha = 0,6$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Найдите: а) $\cos \alpha$; б) $\operatorname{tg} \alpha$.

2. По значению одно из тригонометрических функций ($\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$) найти значения остальных трех:

а) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; б) $\sin \alpha = 0,8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.



3. На тригонометрической окружности отмечены точки P_α и P_β , соответствующие углам α и β . Выберите верные утверждения.

1. $\sin \alpha < \sin \beta$
2. $\cos \beta - \sin \alpha > 0$
3. $\cos \beta > \cos \alpha$
4. $\cos \alpha + \sin \beta < 0$

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.
4. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Контрольные вопросы:

1. Может ли $\sin x$ быть > 1 ?
2. Может ли $\cos x$ быть > 1 ?
3. Может ли $\operatorname{tg} x$ быть > 1 ?
4. Назовите знаки синуса, косинуса и тангенса в различных четвертях.

Практическая работа. Формулы приведения

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: формировать умение использования формул приведения.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Формулы приведения:

φ	α	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
$\sin \varphi$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\cos \varphi$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \varphi$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \varphi$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

Пример. Вычислите:

1) $\sin 10\pi$; 2) $\operatorname{tg} \frac{41\pi}{4}$

Решение

1) Воспользуемся свойством периодичности функции $y = \sin x$, тогда

$$\sin 10\pi = \sin(5 \cdot 2\pi) = \sin 0 = 0$$

2) Так как период функции $y = \operatorname{tg} x$ равен π , получаем:

$$\operatorname{tg} \frac{41\pi}{4} = \operatorname{tg} \left(10\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

Практическая часть:

Преобразуйте данное выражение с помощью формул приведения.

1. $\cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right)$

2. $\sin(\pi - t)$

3. $\operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} + t \right)$

4. $\cos(2\pi - t)$

5. $\operatorname{tg}(2t + \pi)$

6. $\sin \left(t - \frac{\pi}{2} \right)$

7. $\operatorname{tg}(270^\circ - t)$

8. $\cos(t - 90^\circ)$

9. $\sin(720^\circ + t)$

10. $\cos(t + 3,5\pi)$

11. $\operatorname{tg}(15\pi - 2t)$

12. $\operatorname{ctg} \left(\frac{25\pi}{2} + t \right)$

13. $\sin(2t - 21\pi)$

14. $\cos(\pi - \alpha) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$

15. $\sin(270^\circ - \alpha) - \sin(270^\circ + \alpha)$

16. $\frac{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \left(\beta - \frac{\pi}{2} \right)}{\cos(\pi - \beta) \operatorname{tg}(-\alpha)}$

17. $\frac{1 - \sin^2 \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right)}{1 - \sin^2(\pi + \alpha)}$

18. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}(180^\circ - x) + \operatorname{tg}(90^\circ + x)$

19. $\frac{\sin(\pi - \alpha) + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + \operatorname{ctg}(\pi - \alpha)}{\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right)}$

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Область определения и множество значений

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение находить область определения и множество значений функций; развивать функциональную грамотность.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Функция	Область определения D(y)	Множество значений E(y)
$y = \sin x$	R	$-1 < y < 1$
$y = \cos x$	R	$-1 < y < 1$
$y = \operatorname{tg} x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	R
$y = \operatorname{ctg} x$	$x \neq \pi n, n \in Z$	R

Примеры:

1. Найдите область определения: а) $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2}$

Решение: Составим систему неравенств:

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-1 \leq 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1) \leq 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

Нанесем полученные точки $x=1$, $x=-1$ и $x=-2$ на числовую прямую, где у -2 пустой кружочек, а у 1 и -1 закрашенный. Проставим знаки, начиная с «+» справа и выпишем решение системы неравенств: $[-1;1]$. Ответ: $[-1;1]$.

б) $y = 2\sin x$ Решение: так как у $y = \sin x$ $D(y)=R$, то и у $y = 2\sin x$ $D(y)=R$. Ответ: R.

в) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ Решение: $x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

Ответ: все числа кроме $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

Практическая часть

Вариант I

Вариант II

1. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x-2}$;

а) $y = \frac{\sqrt{x^2-25}}{x+7}$;

б) $y = 0,5 \cos x$;

б) $y = 3 \sin x$;

в) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

в) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Найдите область определения и область значений данной функции:

а) $y = 2 + \sin x$; б) $y = \operatorname{tg} x + \frac{\pi}{2}$; а) $y = -\frac{1}{2} \cos x$; б) $y = \operatorname{ctg} x - \frac{\pi}{4}$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретического части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

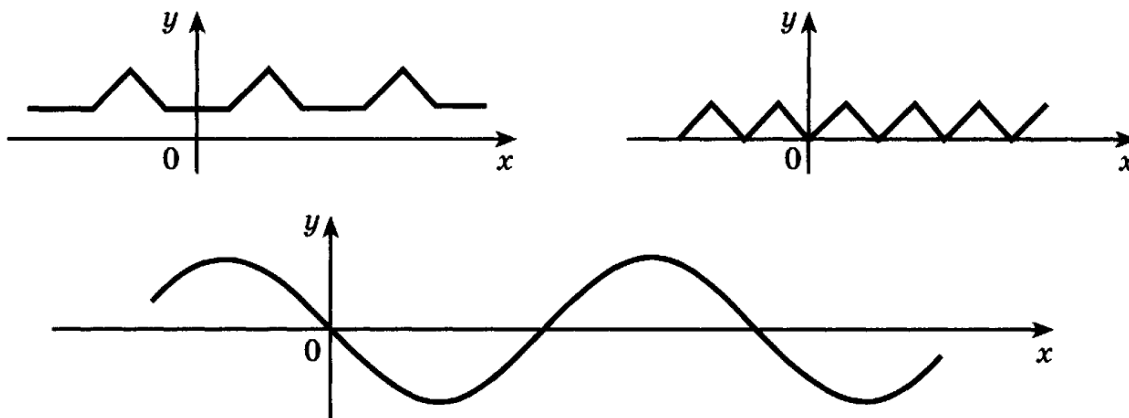
Практическая работа. Четность, нечетность, периодичность функций

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение определять четность, нечетность, периодичность тригонометрических функций; развивать функциональную грамотность.

Теоретическая часть:

Функция	Четность	Период
$y = \sin x$	нечетная	2π
$y = \cos x$	четная	2π
$y = \operatorname{tg} x$	нечетная	π
$y = \operatorname{ctg} x$	нечетная	π

На рисунке представлены графики периодических функций:



Существует 3 случая:

- 1) если $y(-x)=y(x)$, то функция четная;
- 2) если $y(-x)=-y(x)$, то функция нечетная;
- 2) если $y(-x)\neq\pm y(x)$, то функция ни четная, ни нечетная.

1. Выяснить является ли функция четной или нечетной, или ни четной ни нечетной:

$$y = \frac{1}{2} \cos 2x \sin \left(\frac{3\pi}{2} - 2x \right) + 3$$

Решение:

Преобразуем выражение $y = \frac{1}{2} \cos 2x \sin \left(\frac{3\pi}{2} - 2x \right) + 3$, применив формулы приведения.

$$y = \frac{1}{2} \cos 2x \sin \left(\frac{3\pi}{2} - 2x \right) + 3 = -\frac{1}{2} \cos 2x \cos 2x + 3 = -\frac{1}{2} \cos^2 2x + 3$$

Определим четность функции.

$$y(-x) = -\frac{1}{2} \cos^2(-2x) + 3 = -\frac{1}{2} \cos^2 2x + 3 = y(x) \Rightarrow \text{функция четная.}$$

Ответ: четная.

2. Найти наименьший положительный период функции: 1) $y = \sin 2x$; 2) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$.

Решение:

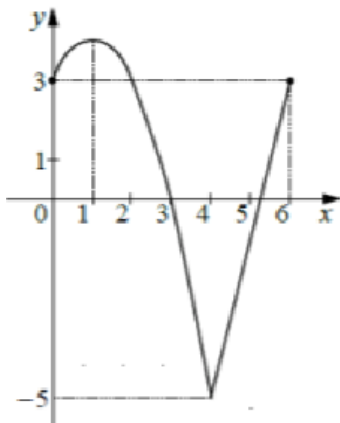
$$1) y = \sin 2x = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2(x + \pi) \Rightarrow T = \pi.$$

$$2) y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3} = \operatorname{ctg} \left(\frac{x}{3} + \pi \right) = \operatorname{ctg} \frac{x + 3\pi}{3} \Rightarrow T = 3\pi.$$

Ответ: 1) π ; 2) 3π .

Практическая часть

1. Про функцию $f(x)$ известно, что: 1) $f(x)$ -четная; 2) $f(x)$ -периодическая, $T=12$;
3) $f(x)=-x^2+2x+3$ при $x \in [0;4]$; 4) $f(x)=4x-21$ при $x \in (4;6]$
а) постройте график функции $f(x)$ на отрезке $[-15;6]$;
б) найдите число нулей функции на отрезке $[-15;5]$.



2. Выяснить является ли функция четной или нечетной, или ни четной ни нечетной:

1) $y = \sin x + x$; 2) $y = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) - x^2$

3. Найти наименьший положительный период функций:

1) $y = \cos \frac{2}{5} x$; 2) $y = \sin \frac{3}{2} x$; 3) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретического части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Свойства и графики синуса, косинуса, тангенса и котангенса

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: рассмотреть свойства и графики функций косинус, синус; закрепить умение находить период функции, область определения и область значений, находить точки пересечения с осями координат.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

I. Числовые функции, заданные формулами $y = \sin x$ и $y = \cos x$, называют соответственно синусом и косинусом; $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, называют соответственно тангенсом и котангенсом;

II. Свойства:

1.1 - область определения;

1.2 - область значений;

2.1 - чётность (нечётность);

1.2 - наименьший положительный период;

3.1 - координаты точек пересечения графика f с осью Ox ;

3.2 - координаты точек пересечения графика f с осью Oy ;

4.1 - промежутки, на которых f принимает положительные значения;

4.2 - промежутки, на которых f принимает отрицательные значения;

5.1 - промежутки возрастания;

5.2 - промежутки убывания;

6.1 - точки минимума;

6.2 - точки минимума;

6.3 - минимумы функции;

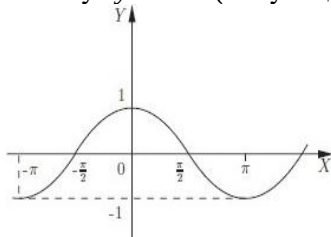
6.4 - точки максимума;

6.5 - максимумы функции.

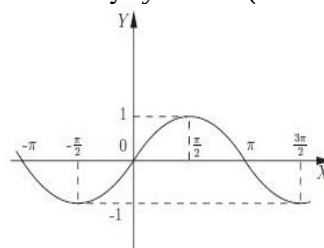
Свойства	$f(x) = \sin x$; $y = \sin x$	$f(x) = \cos x$; $y = \cos x$	$f(x) = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{tg} x$	$f(x) = \operatorname{ctg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$
1.1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R} \setminus x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$
1.2	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
2.1	нечётная	чётная	нечётная	нечётная
2.2	2π	2π	π	π
3.1	$(\pi n; 0)$	$\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right)$	$(\pi n; 0)$	$\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0\right)$
3.2	$(0; 0)$	$(0; 1)$	не пересекается	не пересекается
4.1	$(2\pi n; \pi + 2\pi n)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	$\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right)$
4.2	$(-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$	$\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$
5.1	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	-
5.2	$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[2\pi n; \pi + 2\pi n]$	-	$(\pi n; \pi + \pi n)$
6.1	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$\pi + 2\pi n$	точек экстремумов нет	точек экстремумов нет
6.2	-1	-1		
6.3	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$2\pi n$		
6.4	1	1		

III. Графики:

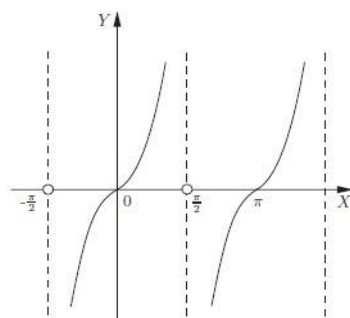
1. Синус $y = \sin x$ (синусоида)



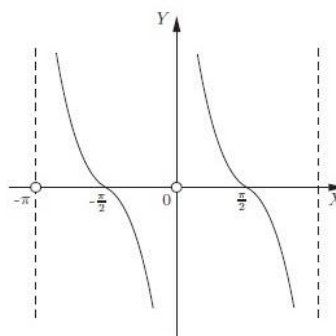
2. Косинус $y = \cos x$ (косинусоида)



3. Тангенс $y = \operatorname{tg} x$ (тангенсоида)



4. Котангенс $y = \operatorname{ctg} x$ (котангенсоида)



$D(f)$ – область определения; $E(f)$ – область значений.

Rm: Если функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, то для того, чтобы убедиться, что она является периодической с периодом T , достаточно показать, что для любого x верно равенство: $f(x+T) = f(x)$

Практическая часть:

1. Найдите область определения и область значений данной функции:

$$y = 2 + \sin x; \quad y = -\frac{1}{2} \cos x; \quad y = \operatorname{tg} x + \frac{\pi}{2}; \quad y = \operatorname{ctg} x - \frac{\pi}{4}.$$

2. Докажите, что функции являются либо четными, либо нечетными:

$$f(x) = x^2 \cos x; \quad f(x) = x^5 \sin \frac{x}{2}; \quad f(x) = \frac{\operatorname{tg} 5x + 1}{|x|};$$

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2 - 1}; \quad f(x) = x^3 \operatorname{ctg} x^2; \quad f(x) = x^5 \cos 3x.$$

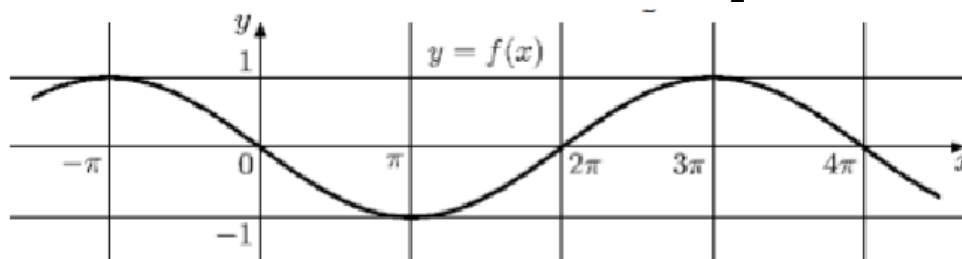
3. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

$$y = 1 + \cos x; \quad y = \sin x - 1 \quad y = 2 \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \quad y = 0,5 \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

4. Докажите, что функция является периодической с периодом T , если:

$$f(x) = \cos x - 1, \quad T = 2\pi; \quad y = \sin x + 1, \quad T = 2\pi;$$

5. На рисунке изображен график функции $f(x) = -\sin \frac{x}{2}$



Выберите верные утверждения:

1. функция $f(x)$ возрастает на промежутке $[-\frac{5\pi}{2}; 0]$;
2. функция $f(x)$ убывает на промежутки $[\frac{7\pi}{2}; 5\pi]$;
3. число 4π является периодом функции $f(x)$;
4. число 2π является периодом функции $f(x)$.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других символов.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Обратные тригонометрические функции

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться описывать свойства обратных тригонометрических функций; находить область определения, множество значений и точки пересечения графика с осями координат.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

I. Числовые функции, заданные формулами $y = \sin x$ и $y = \cos x$, называют соответственно синусом и косинусом; $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, называют соответственно тангенсом и котангенсом;

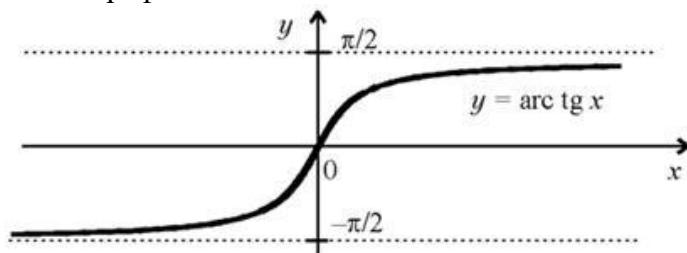
II. Свойства:

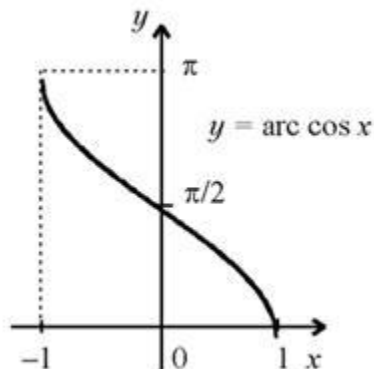
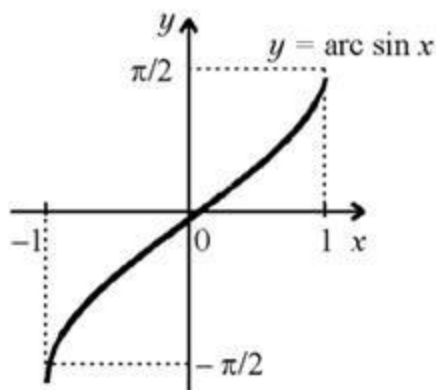
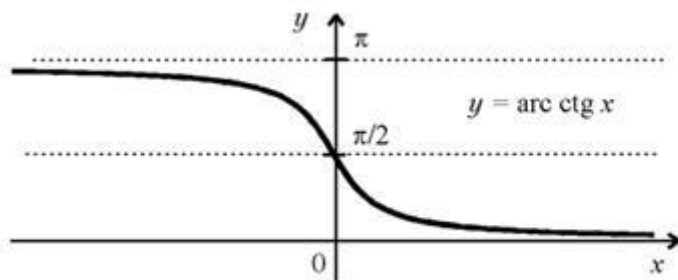
- Область определения.
- Множество значений.
- Четность, нечетность.
- Нули функции.
- Промежутки знакопостоянства.
- Промежутки монотонности.
- Экстремумы.
- Справедливы следующие тождества:

- $\arcsin(\sin x) = x$ при $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$,
- $\sin(\arcsin x) = x$ при $-1 \leq x \leq 1$.
- $\arccos(\cos x) = x$ при $0 \leq x \leq \pi$,
- $\cos(\arccos x) = x$ при $-1 \leq x \leq 1$.

Свойства	$f(x) = \arcsin x$; $y = \arcsin x$	$f(x) = \arccos x$; $y = \arccos x$	$f(x) = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arctg} x$	$f(x) = \operatorname{arcctg} x$; $y = \operatorname{arcctg} x$
а	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
б	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$[0; \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$(0; \pi)$
в	нечетная	ни четная, ни нечетная	нечетная	нечетная
г	$(0; 0)$	$(1, 0), (0, \frac{\pi}{2})$	$(0; 0)$	$(0, \frac{\pi}{2})$
д	знак «+» $(0, 1]$ знак «-» $[-1, 0)$	знак «+» $[-1, 1)$	знак «+» $(0, +\infty)$ знак «-» $(-\infty, 0)$	знак «+» $(-\infty; +\infty)$
е	возрастает на $D(y)$	убывает на $D(y)$	возрастает на $D(y)$	убывает на $D(y)$
ж	точек экстремумов нет	точек экстремумов нет	точек экстремумов нет	точек экстремумов нет

III. Графики





Практическая часть:

№1. Найдите область определения и область значений данной функции:

$$y = \frac{\pi}{2} + \arcsin x; \quad y = -\frac{1}{2} \arccos x; \quad y = \arctg(x+1); \quad y = \text{arcctg}(x-2).$$

№2. Докажите, что функции являются либо четными, либо нечетными:

$$f(x) = x^2 \arccos x; \quad f(x) = x^5 \arcsin \frac{x}{2}; \quad f(x) = \frac{\arctg 5x+1}{|x|}; \quad f(x) = x^3 \text{arcctg} x^2.$$

№3. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

$$y = \arccos(x+1); \quad y = \arcsin x - \frac{\pi}{2}; \quad y = 2\arctg x + \frac{\pi}{2}; \quad y = 0,5\text{arcctg} x - \frac{\pi}{2}.$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Решения тригонометрических уравнений

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умения при решении простейших тригонометрических уравнений.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

1. Простейшие тригонометрические уравнения.

Уравнение	Общее решение	Частные случаи		
		$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$
$\sin x = a,$ $ a \leq 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$
$\cos x = a,$ $ a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$	$x = \pi + 2\pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = 2\pi n$
$\operatorname{tg} x = a,$ $a \in (-\infty; \infty)$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$
$\operatorname{ctg} x = a,$ $a \in (-\infty; \infty)$	$x = \operatorname{arccctg} a + \pi n$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$

Практическая часть:

Решите уравнения:

$$(1 + \cos x)(3 - 2 \cos x) = 0;$$

$$(1 - \cos x)(4 + 3 \cos 2x) = 0;$$

$$(4 \sin x - 3)(2 \sin x + 1) = 0;$$

$$(4 \sin 3x - 1)(2 \sin x + 3) = 0$$

$$(\operatorname{tg} x + 4) \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right) = 0;$$

$$\left(\operatorname{tg} \frac{x}{6} + 1 \right) (\operatorname{tg} x - 1) = 0.$$

1. Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретического части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Решение уравнений, сводящихся к квадратным

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решения уравнений, сводящиеся к квадратам.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

1. Уравнения вида $a \sin^2 x + b \sin x = c$ ($a \cos^2 x + b \cos x = c$; $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x = c$) являются квадратными относительно $\sin x$ ($\cos x$; $\operatorname{tg} x$). Обозначив $\sin x = y$ ($\cos x = y$; $\operatorname{tg} x = y$), получим уравнение $ay^2 + by = c$.

Пусть y_1 и y_2 – его корни, тогда решение исходного уравнения сводится к решению простейших уравнений $\sin x = y_1$ и $\sin x = y_2$ (соответственно для косинуса и тангенса).

2. Уравнения вида $a \cos^2 x + b \sin x = c$ ($a \sin^2 x + b \cos x = c$) сводятся к квадратным заменой $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ($\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$ соответственно).

3. Уравнения, содержащие тангенс и котангенс, также сводятся к квадратным заменой $\operatorname{ctg} x$ на $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ и последующим умножением обеих частей уравнения на $\operatorname{tg} x$.

Пример.

Решить уравнение $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$.

Решение

Это уравнение является квадратным относительно $\sin x$. Если мы обозначим $\sin x = y$, то наше уравнение примет вид: $y^2 + y - 2 = 0$. Решив это уравнение, мы получаем его корни: $y_1 = 1$, $y_2 = -2$. Таким образом, решение исходного уравнения свелось к решению простейших уравнений $\sin x = 1$ и $\sin x = -2$.

Корнем уравнения $\sin x = 1$ является $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; уравнение $\sin x = -2$ не имеет корней.

Ответ. $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Практическая часть:

Решите тригонометрические уравнения:

$$2 \sin^2 x + \sin x = 0;$$

$$\cos^2 x - 2 \cos x = 0;$$

$$6 \sin^2 x - \cos x + 6 = 0;$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x = 0;$$

$$\operatorname{tg} x - 12 \operatorname{ctg} x + 1 = 0;$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретического части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Решение уравнений первого порядка

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решения однородных и неоднородных уравнений первого порядка.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

1. Уравнения вида $a \sin x + b \cos x = 0$ называются *однородными тригонометрическими уравнениями первого порядка*; $a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0$ – *однородными второго порядка*.

Такие уравнения делят на $\cos x$ (на $\cos^2 x$ соответственно) и получают уравнения, содержащие тангенс: $a \cdot \operatorname{tg} x + b = 0$ (соответственно $a \cdot \operatorname{tg}^2 x + b \cdot \operatorname{tg} x + c = 0$), которые решают известными способами.

Но при делении на выражение, содержащее неизвестное, могут быть потеряны корни. Проверим, не являются ли корни уравнения $\cos x = 0$ и уравнения $\cos^2 x = 0$ корнями соответствующих однородных уравнений.

Пример.

Решить уравнение $2 \sin x - 3 \cos x = 0$.

Решение

Разделим на $\cos x$ обе части уравнения и получим $2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$, $\operatorname{tg} x = 3/2$, $x = \operatorname{arctg} 3/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $x = \operatorname{arctg} 3/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Неоднородные уравнения.

Уравнения вида $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, называются *неоднородными тригонометрическими уравнениями первого порядка*. Они имеют несколько способов решения. Рассмотрим три основных.

1) С помощью формул половинного угла.

Используя формулы

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2},$$

$$\sin x = 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2},$$

$$1 = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2},$$

получаем

$$\begin{aligned} a \cdot 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} + b \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) &= c \cdot \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) \times \\ \times (-b - c) \cdot \sin^2 \frac{x}{2} + 2a \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + (b - c) \cdot \cos^2 \frac{x}{2} &= 0 \end{aligned}$$

Таким образом, получено однородное уравнение второго порядка, которое вы уже умеете решать.

2) С помощью формул тангенса половинного угла.

Используя формулы

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

получаем

$$a \cdot \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + b \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = c$$

$$2a \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b - b \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = c + c \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$$

$$(-b - c) \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2a \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} + (b - c) = 0.$$

Таким образом, получается уравнение, сводящееся к квадратному.

3) С помощью вспомогательного угла.

Так как $a \neq 0$, $b \neq 0$, то можно поделить обе части уравнения на

$\sqrt{a^2 + b^2}$, получим

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

так как выполняется равенство $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$. Тогда получим уравнение

$$\cos \varphi \cdot \sin x + \sin \varphi \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Угол φ находится как $\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ или $\arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Уравнения вида $a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = d$, где $d \neq 0$, решают следующим образом: представляют единицу как $\sin^2 x + \cos^2 x$ и умножают это выражение на d .

$a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$. После преобразований получим однородное тригонометрическое уравнение второго порядка.

Практическая часть:

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0.$$

$$3 \sin x + 2 \cos x = 0.$$

$$3 \sin x + 4 \cos x = 1.$$

$$\sin x - 2 \cos x = 0.$$

$$2 \sin 2x - 3 \cos 2 = 0.$$

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1;$$

$$4 \sin 3x + 5 \cos 3x = 0.$$

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2.$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить знания и умения студентов по освоению формул тригонометрии.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

1. Простейшие тригонометрические уравнения.

Уравнение	Общее решение	Частные случаи		
		$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$
$\sin x = a, a \leq 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$
$\cos x = a, a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$	$x = \pi + 2\pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = 2\pi n$
$\operatorname{tg} x = a, a \in (-\infty; \infty)$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$
$\operatorname{ctg} x = a, a \in (-\infty; \infty)$	$x = \operatorname{arccotg} a + \pi n$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$

2. Решение тригонометрических неравенств.

Пример. Решить неравенство $\cos x > 1/2$.

Решение: По определению косинуса $\cos x$ – это абсцисса точки единичной окружности.

Чтобы решить неравенство $\cos x > 1/2$, нужно выяснить, какие точки единичной окружности имеют абсциссу, большую $1/2$.

Абсциссу, равную $1/2$, имеют две точки единичной окружности M_1 и M_2 .

Точка M_1 получается поворотом точки $P(0; 1)$ на угол $-\pi/3$, а также на углы $-\pi/3 + 2\pi n$, где $n = +1, -1, -2, \dots$; точка M_2 – поворотом на угол $\pi/3$, а также на углы $\pi/3 + 2\pi n$, где $n = +1, -1, -2, \dots$

Абсциссу, большую $1/2$, имеют все точки M дуги единичной окружности, лежащие правее прямой M_1M_2 . Таким образом, решениями неравенства $\cos x > 1/2$ являются все числа x из промежутка $-\pi/3 < x < \pi/3$.

Ответ. Все решения данного неравенства – множество интервалов $\pi/3 + 2\pi n < x < \pi/3 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Практическая часть:

1. Решите уравнение: $2 \cos x = \frac{\sqrt{8}}{2}$.

2. Решите уравнение: $\operatorname{tg}(\pi - x) + \sqrt{3} = 0$.

3. Решите уравнение: $\cos 3x - 1 = -0,5$.

4. Решите уравнение: $2 \cos^2 x + \operatorname{tg} x = 2$.

5. Решить неравенство $\sin 2x < \frac{1}{2}$;

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Раздел 7. Многогранники и круглые тела

Практическая работа. Призма

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить понятие призмы, закрепить умение нахождения площади боковой поверхности призмы, способствовать приобретению навыка решения задач.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его **гранями**. Гранями тетраэдра и октаэдра являются треугольники, гранями параллелепипеда — параллелограммы. Стороны граней называются **ребрами**, а концы ребер — **вершинами** многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю** многогранника. Плоскость, по обе стороны от которой имеются точки многогранника, называется **секущей плоскостью**, а общая часть многогранника и секущей плоскости — **сечением многогранника**.

Многогранники бывают выпуклые и невыпуклые. Многогранник называется **выпуклым**, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.

У призмы два основания, как правило, это две равные фигуры: треугольники, четырехугольники, пятиугольники, т.е. любой многоугольник.

Призма бывает двух видов: наклонная и прямая. У прямой призмы, боковые грани перпендикулярны основаниям.

Параллелепипед — это четырехугольная призма. У произвольного параллелепипеда все шесть граней — параллелограммы, у прямого параллелепипеда основания — параллелограммы, а боковые грани — прямоугольники, у прямоугольного параллелепипеда все шесть граней — прямоугольники.

При решении задач необходимо знать формулы площадей разных многоугольников.

Формула нахождения боковой поверхности призмы $S_{\text{бок}} = P_{\perp} \cdot l$, где P — периметр основания, l — высота.

Практическая часть:

Задача. Сторона основания правильной четырёхугольной призмы равна a , диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 45° . Найдите:

- а) диагональ призмы;
- б) угол между диагональю призмы и плоскостью боковой грани;
- в) площадь боковой поверхности призмы;
- г) площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Пирамида

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить понятие пирамиды, закрепить умение нахождения площади боковой поверхности правильной пирамиды, способствовать приобретения навыка решения задач.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Введем понятия пирамиды, ее элементов: **основание, боковые грани, вершина, боковые ребра, высота.**

Введем понятие правильной пирамиды: **основание пирамиды** — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром ее основания, является **высотой пирамиды.**

Боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники.

Апофема правильной пирамиды – это высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины. Этот термин употребляется только для правильной пирамиды.

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} p \cdot d$$

, где p - периметр основания пирамиды, а d – апофема.

Практическая часть:

Вариант 1

Высота правильной треугольной пирамиды равна $a\sqrt{3}$, радиус окружности, описанной около её основания, $2a$.

Найдите:

- а)⁰ апофему пирамиды;
- б)⁰ угол между боковой гранью и основанием;
- в)⁰ площадь боковой поверхности;
- г) плоский угол при вершине пирамиды.

Вариант 2

Апофема правильной четырёхугольной пирамиды равна $2a$, высота пирамиды равна $a\sqrt{2}$. Найдите:

- а)⁰ сторону основания пирамиды;
- б)⁰ угол между боковой гранью и основанием;
- в)⁰ площадь поверхности пирамиды;
- г) расстояние от центра основания пирамиды до плоскости боковой грани.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретического части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Усеченная пирамида

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить понятие усеченной пирамиды, закрепить умение нахождения площади боковой поверхности правильной усеченной пирамиды, способствовать приобретению навыка решения задач.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Плоскость, параллельная основанию пирамиды, разбивает её на два многогранника. Один из них является пирамидой, а другой называется усечённой пирамидой. Усечённая пирамида — это часть полной пирамиды, заключённая между её основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию данной пирамиды.

При выполнении рисунков к задачам на усечённую пирамиду удобно вначале начертить полную пирамиду, а затем выделить усечённую пирамиду.

Элементы усечённой пирамиды: основания, боковые грани, боковые рёбра, высоту. Докажем, что боковые грани усечённой пирамиды — трапеции.

Основания правильной усечённой пирамиды — правильные многоугольники, а боковые грани — равные равнобедренные трапеции; высоты этих трапеций называются *апофемами* усечённой пирамиды.

Формула площади боковой поверхности правильной усечённой пирамиды.

$$S_{\text{бок}} = n \cdot S_{\text{грани}} = \frac{a_1 \cdot n + a_2 \cdot n}{2} \cdot h = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot h,$$

где P_1 и P_2 — периметры оснований.

Практическая часть:

Решите задачи:

1. Стороны оснований правильной треугольной усечённой пирамиды равны 4 дм и 2 дм, а боковое ребро равно 2 дм. Найдите высоту и апофему пирамиды.
2. Основаниями усеченной пирамиды являются правильные треугольники со сторонами 5 см и 3 см соответственно. Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно к плоскостям оснований и равно 1 см. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретического части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Построение сечений куба

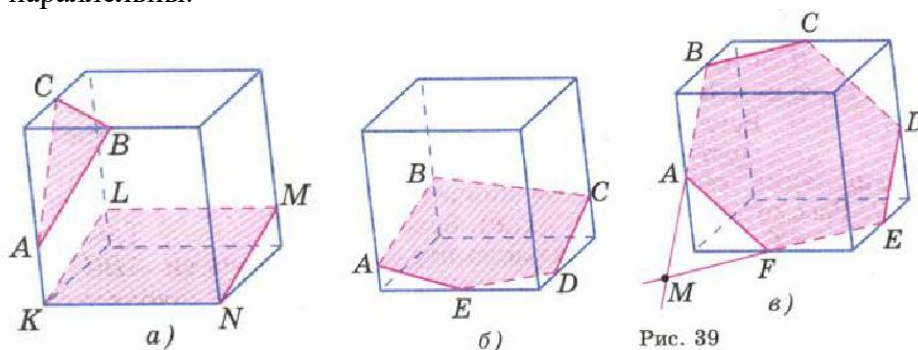
ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решения задач при построении сечений куба.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

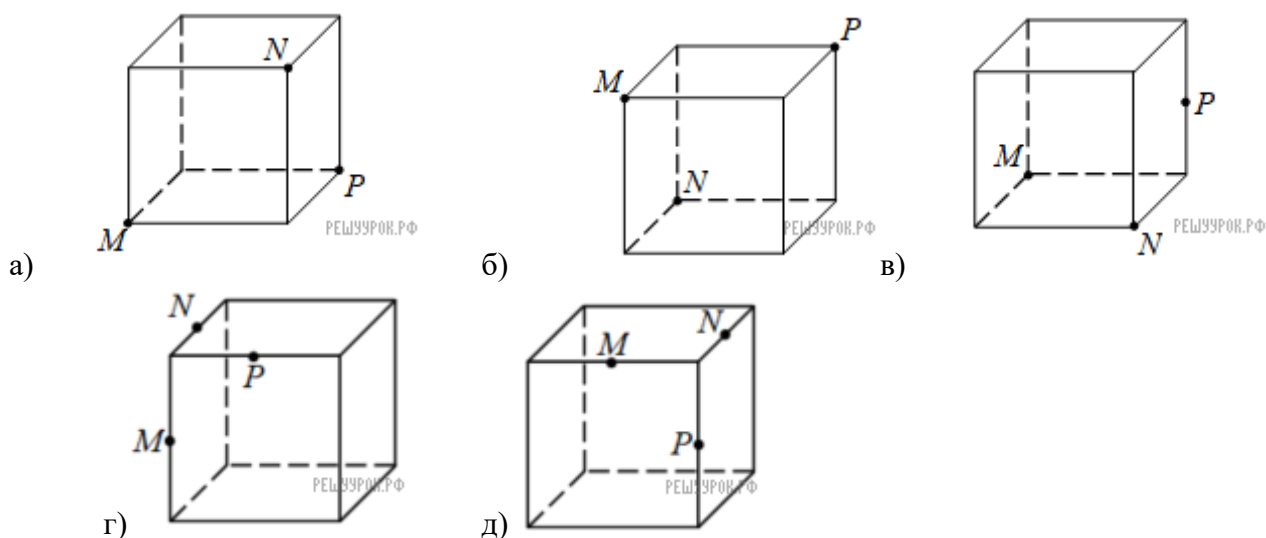
Для решения многих геометрических задач, связанных с тетраэдром и параллелепипедом, полезно уметь строить на рисунке их сечения различными плоскостями. Уточним, что понимается под сечением тетраэдра или параллелепипеда. Назовем **секущей плоскостью** тетраэдра (параллелепипеда) любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (параллелепипеда). Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра (параллелепипеда) по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется сечением тетраэдра (параллелепипеда). Так как тетраэдр имеет четыре грани, то его сечениями могут быть только треугольники и четырехугольники. Параллелепипед имеет шесть граней. Его сечениями могут быть треугольники, четырехугольники, пятиугольники и шестиугольники.

При построении сечений в кубе обращаем внимание на то, противоположные стороны сечения параллельны.



Практическая часть:

Постройте сечение куба, проходящее через точки M , N и P . Определите вид треугольника, являющегося сечением.



Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Построение сечений призмы и пирамиды

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решения задач при построении сечений призмы и пирамиды.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Для решения многих геометрических задач, связанных с тетраэдром и параллелепипедом, полезно уметь строить на рисунке их сечения различными плоскостями. Уточним, что понимается под сечением тетраэдра или параллелепипеда. Назовем **секущей плоскостью** тетраэдра (параллелепипеда) любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (параллелепипеда). Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра (параллелепипеда) по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется сечением тетраэдра (параллелепипеда). Так как тетраэдр имеет четыре грани, то его сечениями могут быть только треугольники и четырехугольники. Параллелепипед имеет шесть граней. Его сечениями могут быть треугольники, четырехугольники, пятиугольники и шестиугольники.

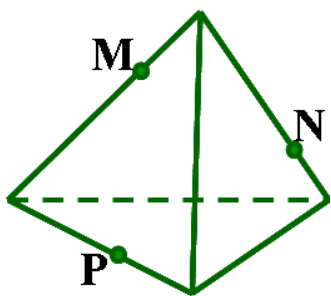
Практическая часть:

Задачи на построение.

1. На рёбрах CD и BB_1 призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты точки P и Q . Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через прямую AC параллельно прямой PQ .

2. Через точки P , R и Q , заданные соответственно на ребрах CB , CD и CC_1 призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость. Постройте сечение призмы плоскостью, параллельной плоскости PQR и проходящей через точку A_2 на ребре AA_1 .

3. Построить сечение плоскостью пирамиды проходящую через точки M , N , P .



Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретического части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Решение задач на многогранники

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решения задач на измерение многогранника и построения чертежа.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Введем понятия пирамиды, ее элементов: **основание, боковые грани, вершина, боковые ребра, высота.**

Введем понятие правильной пирамиды: **основание пирамиды** — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром ее основания, является **высотой пирамиды.**

Боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники.

Апофема правильной пирамиды — это высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины. Этот термин употребляется только для правильной пирамиды.

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} p \cdot d$$

, где p - периметр основания пирамиды, а d – апофема.

Практическая часть:

1. Задача. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 4 см, плоский угол при вершине равен 60° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2. Задача. В правильной четырёхугольной пирамиде высота равна 4 см, плоский угол при вершине равен 60° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3. Задача. Основанием пирамиды является ромб. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания и образуют двугранный угол 150° , а две другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если её высота равна 4 см.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Сфера и шар

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решения задач на нахождение элементов сферы и шара.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

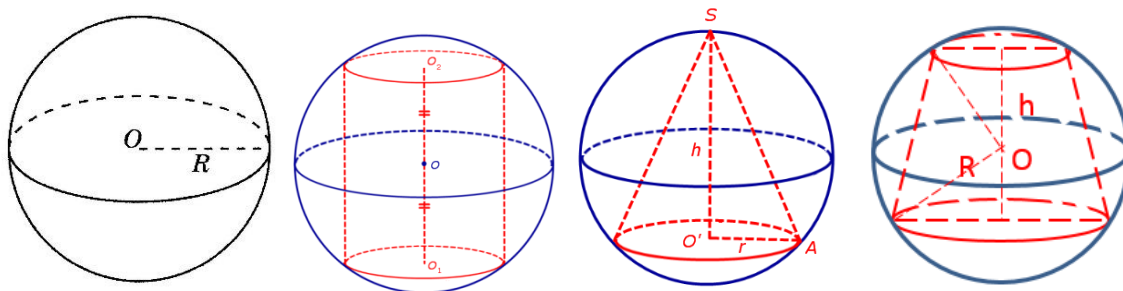
Окружность – множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки. Данная точка называется *центром* окружности, расстояние от центра до любой точки окружности называется *радиусом* окружности. *Круг* – это часть плоскости, ограниченная окружностью. *Сфера* – это поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на заданном расстоянии от данной точки, которую называют *центром*.

Тело, ограниченное сферой, называется *шаром*.

Уравнение сферы – уравнение сферы радиуса R и центром $C(x_0; y_0; z_0)$.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется *касательной плоскостью к сфере*, а их общая точка – *точкой касания*.



Соотношение между радиусом сферы, радиусом сечения и расстоянием от центра сферы до плоскости сечения:

$$R^2 = h^2 + r^2$$

Формула для вычисления площади поверхности сферы и ее элементов:

$S = 4\pi R^2$ – площадь сферы.

$S = 2\pi Rh$ – площадь поверхности сегмента сферы радиуса R с высотой h .

$S = \pi Rh(2h + \sqrt{2hR - h^2})$ – площадь поверхности сектора с высотой h .

3. *Взаимное расположение сферы и плоскости*

Взаимное расположение сферы и плоскости зависит от соотношения между радиусом сферы R и расстояния от центра сферы до плоскости d .

1. Пусть $d < R$. Если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, тогда сфера и плоскость пересекаются, и сечение сферы плоскостью есть окружность.

2. Пусть $d = R$. Если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы тогда сфера и плоскость имеют только одну общую точку, и в этом случае говорят, что плоскость касается сферы.

3. Пусть $d > R$. Если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек.

Рассмотрим случай касания более подробно.

Задача №1. Площадь сечения шара, проходящего через его центр, равна 9 кв. м. Найдите площадь поверхности шара.

Решение:

Площадь круга вычисляется по формуле: $S_{кр} = \pi R^2$

Площадь поверхности шара вычисляется по формуле: $S_{\text{сф}} = 4\pi R^2$. Радиус шара и радиуса сечения, проходящего через центр шара, одинаковые. Поэтому площадь поверхности шара в 4 раза больше площади его диаметрального сечения. То есть площадь поверхности шара равна 36.

Ответ: 36

Задача №2. Вычислите радиус круга, площадь которого равна площади сферы радиуса 5.

Решение:

Площадь сферы равна $S_{\text{сф}} = 4\pi R^2$. То есть $S_{\text{сф}} = 100\pi$.

По условию площадь круга некоторого радиуса r также равна 100π . Значит, $r^2 = 100$, то есть $r = 10$.

Ответ: 10.

Задача №3. Все стороны треугольника ABC касаются сферы радиуса 5. Найти расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если $AB=13$, $BC=14$, $CA=15$

Решение:

Окружность, вписанная в треугольник, является сечением сферы.

Найдем ее радиус.

Площадь треугольника с известными сторонами можно вычислить по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = 0.5(AB + BC + AC) = 21$$

$$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$$

$S=84$.

С другой стороны, $S = p \cdot r$

Отсюда $r=4$.

Теперь найдем расстояние от центра шара до секущей плоскости.

Используем соотношение:

$$R^2 = h^2 + r^2$$

$$h^2 = R^2 - r^2$$

$h^2 = 25 - 16 = 9$ $h = 3$ Ответ: 3.

Задача №4. Вершины прямоугольника лежат на сфере радиуса 10. Найти расстояние от центра сферы до плоскости прямоугольника, если его диагональ равна 16.

Решение:

Так как вершины прямоугольника лежат на сфере, то окружность, описанная около прямоугольника, является сечением сферы.

Радиус окружности, описанной около прямоугольника, равен половине его диагонали, то есть $r=8$.

По условию задачи $R=10$.

Используем соотношение:

$$R^2 = h^2 + r^2$$

$$h^2 = R^2 - r^2$$

$h^2 = 100 - 64 = 36$ $h=6$.

Ответ: 6.

Задача №5.

Найдите координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 25$

Напишите уравнение сферы радиуса R с центром в точке A , если $A(2; 0; -1)$, $R = 7$

Проверьте, лежит ли точка A на сфере, заданной уравнением

$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 1$, если $A(-2; 1; 4)$

Решение:

1) т. $O(2; -3; 0)$, $R=5$

2) $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 49$

3) $(-2+2)^2 + (1-1)^2 + (4-3)^2 = 1$ или $0+0+1=1$ верно $\rightarrow$ принадлежит

Задача №6

Два сечения шара радиуса 10 см параллельными плоскостями имеют радиусы, равные 6 см и 8 см. Найти расстояние между секущими плоскостями.

Решение:

находим расстояние каждой из параллельных плоскостей до центра шара из прямоугольных треугольников по теореме Пифагора:

$$d_1 = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ см}$$

или

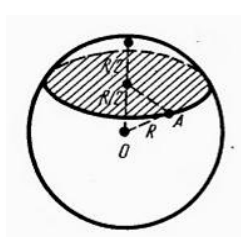
$$d_2 = \sqrt{100 - 64} = 6 \text{ см.}$$

В зависимости от того, лежит ли центр шара между плоскостями или нет, получаем два различных ответа к задаче:

$$d=14 \text{ см}$$

Задача №7

Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга (рис. 69)?



Решение:

отношение площади круга к площади полученного сечения равно

$$\frac{\pi \left(R \sqrt{\frac{3}{4}} \right)^2}{\pi R^2} = \frac{3}{4}.$$

Практическая часть:

Решите задачи:

1) Шар, радиус которого равен 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Вычислите площадь получившегося сечения.

2) Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к нему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

3) 1. Найдите координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16$.

2. Напишите уравнение сферы радиуса R с центром в точке A , если $A(-2; 1; 0)$, $R=6$.

3. Проверьте, лежит ли точка A на сфере, заданной уравнением

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 4, \text{ если } A(5; -1; 4).$$

4) Радиус шара R . Через конец радиуса проведена плоскость под углом в 60° к нему. Найти площадь сечения.

5) На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними: 6 см, 8 см и 10 см. Радиус шара равен 13 см. Найти расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти три точки.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

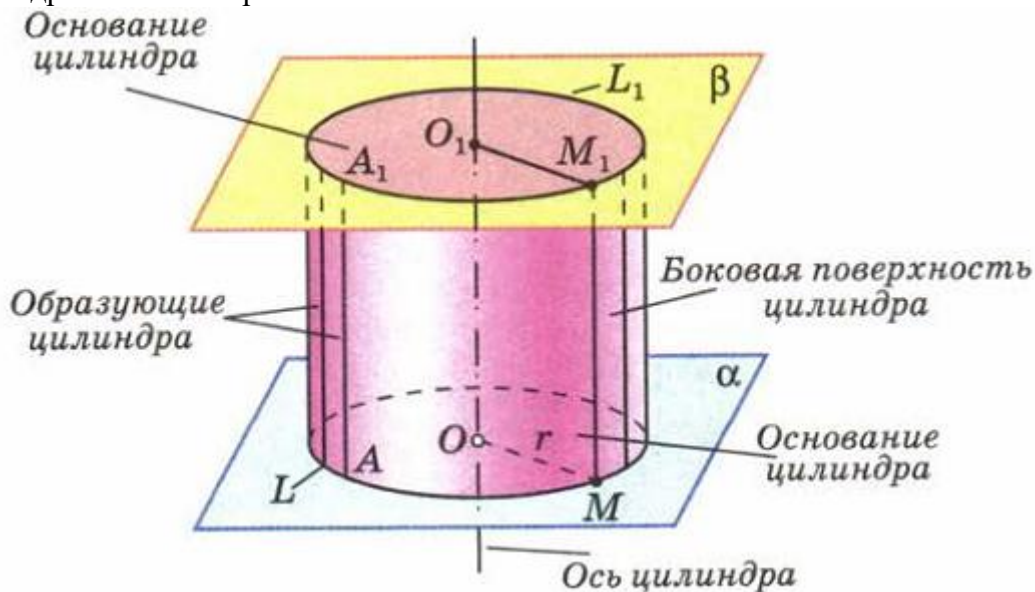
Практическая работа. Цилиндр

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться решать задачи с нахождением различных измерений цилиндра.

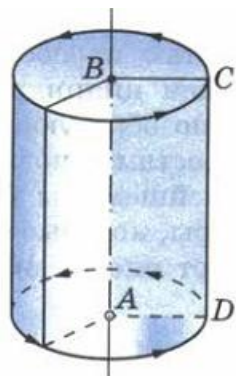
Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Рассмотрим произвольную плоскость α и окружность L с центром O радиуса r , лежащую в этой плоскости. Через каждую точку окружности L проведем прямую, перпендикулярную к плоскости α . Поверхность, образованная этими прямыми, называется **цилиндрической поверхностью**, а сами прямые - **образующими** цилиндрической поверхности. Прямая, проходящая через точку O перпендикулярно к плоскости α , называется **осью** цилиндрической поверхности.



Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L_1 , называется цилиндром (см. рис. выше). Круги называются **основаниями** цилиндра, отрезки образующих, заключенные между основаниями, - **образующими** цилиндра, а образованная ими часть цилиндрической поверхности боковой поверхностью цилиндра. Ось цилиндрической поверхности называется **осью** цилиндра.



Как уже отмечалось, все образующие цилиндра параллельны и равны друг другу. Длина образующей называется **высотой** цилиндра, а радиус основания — **радиусом** цилиндра.

Цилиндр может быть получен вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. На рисунке изображен цилиндр, полученный вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг стороны AB . При этом боковая поверхность цилиндра образуется вращением стороны CD , а основания — вращением сторон BC и AD .

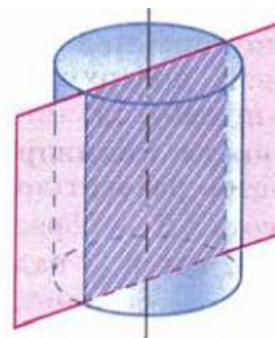
Если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то сечение представляет собой прямоугольник, две стороны которого — **образующие**, а две другие — **диаметры** оснований цилиндра. Такое сечение называется **осевым**.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi rh.$$

Площадь полной поверхности цилиндра называется суммой площадей боковой поверхности и двух оснований:

$$S_{\text{цил}} = 2\pi r (r + h).$$



Практическая часть:

Решить задачи:

1. Из квадрата, диагональ которого равна d , свернута боковая поверхность цилиндра. Найдите площадь основания этого цилиндра.
2. Цилиндр получен вращением квадрата со стороной a вокруг одной из его сторон. Найдите площадь: а) осевого сечения цилиндра; б) боковой поверхности цилиндра; в) полной поверхности цилиндра.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

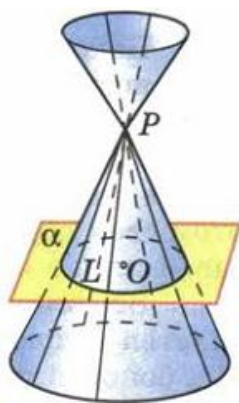
Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Конус

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться решать задачи с нахождением различных измерений конуса.

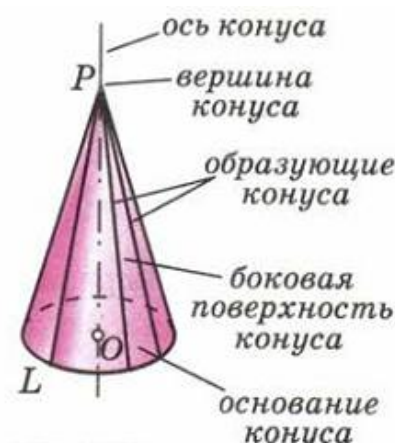
Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:



Рассмотрим окружность L с центром O и прямую OP , перпендикулярную к плоскости α этой окружности. Через точку P и каждую точку окружности проведем прямую. Поверхность, образованная этими прямыми, называется **конической поверхностью**, а сами прямые — **образующими** конической поверхности. Точка P называется **вершиной**, а прямая OP — **осью** конической поверхности.

Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L , называется **конусом**. Круг называется **основанием** конуса, вершина конической поверхности **вершиной** конуса, отрезки образующих, заключенные между вершиной и основанием, — **образующими** конуса, а образованная ими часть конической поверхности **боковой поверхностью** конуса. Ось конической поверхности называется **осью** конуса, а ее отрезок, заключенный между вершиной и основанием, — **высотой** конуса. Образующие конуса равны друг другу.



Площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую: $S_{\text{бок}} = \pi r l$.

Площадью полной поверхности конуса называется сумма площадей боковой поверхности и основания: $S_{\text{кон}} = \pi r (l + r)$.

Практическая часть:

1. Угол между образующей и осью конуса равен 45° , образующая равна 6,5 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
2. Площадь осевого сечения конуса равна $0,6 \text{ см}^2$. Высота конуса равна 1,2 см. Вычислите площадь полной поверхности конуса.
3. Прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см вращается в круг меньшего катета. Вычислите площади боковой и полной поверхностей образованного при этом вращении конуса.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Формулы объема куба, прямоугольного параллелепипеда

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решения задач на нахождение объема куба, прямоугольного параллелепипеда.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Объем куба равен произведению трех его измерений: $V=a^3$.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений:
 $V=abc$.

Практическая часть:

- 1 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ диагональ $B_1 D$ составляет с плоскостью основания угол в 45° , а двугранный угол $A_1 B_1 B D$ равен 60° . Найдите объем параллелепипеда, если диагональ основания равна 12 см.
- 2 Найдите объем прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если: а) $AC_1 = 1$ м, $\angle C_1 A C = 45^\circ$, $\angle C_1 A B = 60^\circ$; б) $AC_1 = 24$ см, $\angle C_1 A A_1 = 45^\circ$, диагональ AC_1 составляет угол в 30° с плоскостью боковой грани.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Формулы объема цилиндра

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решения задач на нахождение объема цилиндра.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту: $V=Sh$.

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту: $V=Sh$, где $S=\pi R^2$.

Формула для нахождения массы $m=\rho V$.

Практическая часть:

- 1 Какое количество нефти (в тоннах) вмещает цилиндрическая цистерна диаметром 18 м и высотой 7 м, если плотность нефти равна $0,85 \text{ г/см}^3$?
- 2 Площадь основания цилиндра равна Q , а площадь его осевого сечения равна S . Найдите объем цилиндра.
- 3 Свинцовая труба (плотность свинца $11,4 \text{ г/см}^3$) с толщиной стенок 4 мм имеет внутренний диаметр 13 мм. Какова масса трубы, если ее длина равна 25 м?

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Формулы объема наклонной призмы

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решения задач на нахождение объема наклонной призмы.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Объем наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту: $V=aS_{\text{сеч}}$, где a – боковое сечение призмы, а $S_{\text{сеч}}$ – сечение призмы перпендикулярное боковому ребру.

Для наклонной призмы существует и другой способ вычисления объема, а именно: объем наклонной призмы равен произведению бокового ребра на площадь сечения призмы плоскостью, перпендикулярной к боковым ребрам и пересекающей их. Коротко говорят так: объем наклонной призмы равен произведению бокового ребра на площадь перпендикулярного ему сечения.

Практическая часть:

1. В основании наклонной призмы квадрат со стороной 6 см, боковые грани ромбы с углом в 60° . Найти объем наклонной призмы и площадь полной поверхности.
2. Найдите объем наклонной треугольной призмы, если расстояния между ее боковыми ребрами равны 37 см, 13 см и 30 см, а площадь боковой поверхности равна 480 см^2 .

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Формулы объема пирамиды, конуса

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решения задач на нахождение объема пирамиды, конуса

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Площадь поверхности пирамиды

$S_{\text{бок}} = 1/2 p m$ - периметр основания; m - апофема.

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды

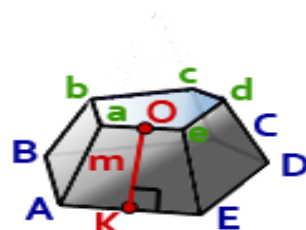
m - апофема пирамиды, отрезок OK

P - периметр нижнего основания, $ABCDE$

p - периметр верхнего основания, $abcde$

Формула площади боковой поверхности правильной усеченной пирамиды, (S):

$$S = \frac{m}{2} (P + p)$$

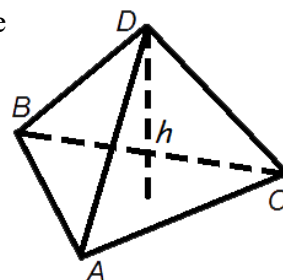


Объем пирамиды

Объем пирамиды равен трети от произведения площади ее основания на высоту.

Формула объема пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S_0 \cdot h$$



где V - объем пирамиды, S_0 - площадь основания пирамиды, h - длина высоты пирамиды.

Расчёт объёма усечённой пирамиды

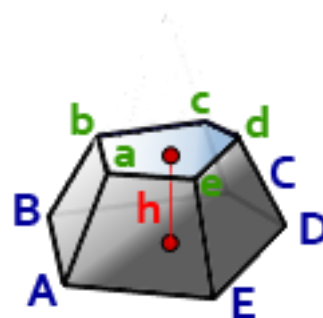
h - высота пирамиды

$S_{\text{ниж}}$ - площадь нижнего основания, $ABCDE$

$S_{\text{верх}}$ - площадь верхнего основания, $abcde$

Объем усеченной пирамиды, (V):

$$V = \frac{1}{3} h (S_{\text{ниж}} + \sqrt{S_{\text{ниж}} S_{\text{верх}}} + S_{\text{верх}})$$



Площадь цилиндра

Площадь боковой поверхности круглого цилиндра равна произведению периметра его основания на высоту.

Формула для вычисления площади боковой поверхности цилиндра $S = 2\pi R h$

Площадь полной поверхности круглого цилиндра равна сумме площади боковой поверхности цилиндра и удвоенной площади основания.

Формула для вычисления площади полной поверхности цилиндра

$$S = 2\pi R h + 2\pi R^2 = 2\pi R(R + h)$$

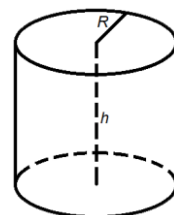
где S - площадь, R - радиус цилиндра, h - высота цилиндра, $\pi = 3.141592$

Объем цилиндра

Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

Формулы объема цилиндра

$$V = \pi R^2 h \quad V = S_0 h \text{ где } V\text{- объем цилиндра, } S_0\text{- площадь основания цилиндра, } R\text{-}$$



радиус цилиндра, h- высота цилиндра, $\pi = 3.141592$

Площадь конуса

Площадь боковой поверхности конуса равна произведению его радиуса и образующей умноженному на число π

Формула площади боковой поверхности конуса: $S = \pi R l$

Площадь полной поверхности конуса равна сумме площади основания конуса и площади боковой поверхности.

Формула площади полной поверхности конуса: $S = \pi R^2 + \pi Rl = \pi R(R + l)$
где S- площадь, R- радиус основания конуса, l- образующая конуса, $\pi = 3.141592$

Формулы площади поверхности усеченного конуса

R - радиус нижнего основания

r- радиус верхнего основания

L - образующая усеченного конуса

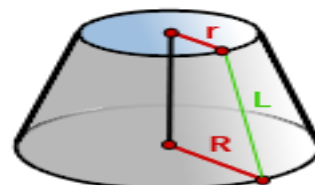
$\pi \approx 3.14$

Формула площади боковой поверхности усеченного конуса,
($S_{бок}$):

$$S_{бок} = \pi L(R + r)$$

Формула площади полной поверхности усеченного конуса, (S):

$$S = \pi(LR + Lr + R^2 + r^2)$$



Объем конуса

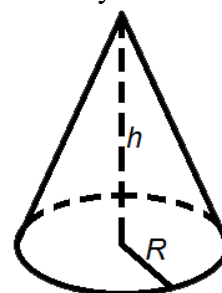
Объем конуса равен трети от произведению площади его основания на высоту.

Формулы

объема

конуса

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h \quad V = \frac{1}{3} S_o h$$



где V- объем конуса,

S_o - площадь основания конуса, R- радиус основания конуса, h- высота конуса, $\pi = 3.141592$

Формула объема усеченного конуса

R- радиус нижнего основания

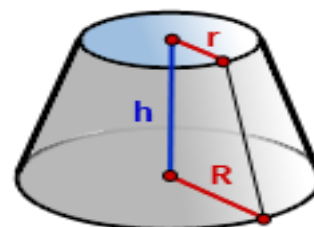
r- радиус верхнего основания

h- высота конуса

$\pi \approx 3,14$

Объем усеченного конуса, (V):

$$V = \frac{1}{3} \pi h(R^2 + R \cdot r + r^2)$$



Практическая часть:

Решите задачи:

1. Найдите объем конуса, осевое сечение которого представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 6 см.
2. Найдите объем конуса, полученного в результате вращения вокруг большего катета прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной 2 см, и углом 30° .
3. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна 8 см и составляет с боковым ребром угол в 30° . Найдите объем призмы.
4. Найти объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна 12 см, а сторона основания равна 13 см.
5. Стаканчик для мороженого конической формы имеет глубину 12 см и диаметр верхней части 5 см. На него сверху положили две ложки мороженого в виде полушарий диаметром 5 см. Переполнит ли мороженое стаканчик, если оно растает?

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Формулы объема шара и площади сферы

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться применять формулы объема шара и площади сферы при решении задач.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть: Объем шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Объемы шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора

а) **Шаровым сегментом** называется часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью. На рисунке секущая плоскость α , проходящая через точку B , разделяет шар на два шаровых сегмента. Круг, получившийся в сечении, называется **основанием** каждого из этих сегментов, а длины отрезков AB и BC диаметра AC , перпендикулярного к секущей плоскости, называются **высотами** сегментов.

Объем V шарового сегмента вычисляется по формуле:

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right).$$

б) **Шаровым слоем** называется часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями. Круги, получившиеся в сечении шара этими плоскостями, называются **основаниями** шарового слоя, а расстояние между плоскостями — **высотой** шарового слоя.

Объем шарового слоя можно вычислить как разность объемов двух шаровых сегментов. Например, объем шарового слоя, изображенного на рисунке, равен разности объемов шаровых сегментов, высоты которых равны AC и AB .

в) **Шаровым сектором** называется тело, полученное вращением кругового сектора с углом, меньшим 90° , вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов. Шаровой сектор состоит из шарового сегмента и конуса. Если радиус шара равен R , а высота шарового сегмента равна h , то объем V шарового сектора вычисляется по формуле:

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h. \quad \text{Площадь сферы равна} \quad S = 4\pi R^2.$$

Практическая часть:

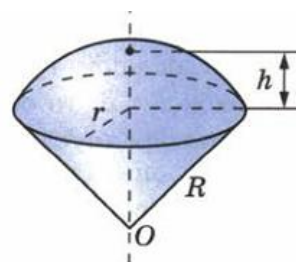
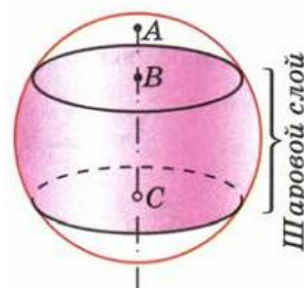
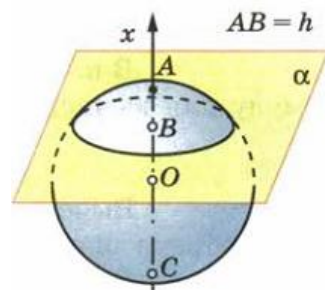
1. Пусть V — объем шара радиуса R , а S — площадь его поверхности. Найдите: а) S и V , если $R = 4$ см; б) R и S , если $V = 113,04$ см³; в) R и V , если $S = 64\pi$ см².

2. Стаканчик для мороженого конической формы имеет глубину 10 см и диаметр верхней части 4 см. На него сверху положили две ложки мороженого в виде полушарий диаметром 4 см. Переполнит ли мороженое стаканчик, если оно растает?

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.



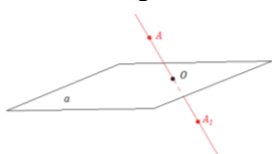
Практическая работа. Центральная и осевая симметрия

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: изучить понятие центральной и осевой симметрий.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Допустим, что каждой точке M пространства поставлена в соответствие некоторая точка M_1 , причем любая точка M_1 пространства оказалась поставленной в соответствие какой-то точке M . Тогда говорят, что задано **отображение пространства на себя**. Говорят также, что при данном отображении **точка M переходит (отображается) в точку M_1** . Под **движением пространства** понимается отображение пространства на себя, при котором любые две точки A и B переходят (отображаются) в какие-то точки A_1 и B_1 , так, что $A_1B_1=AB$. Иными словами, **движение пространства — это отображение пространства на себя, сохраняющее расстояния между точками**.



Центральная симметрия Примером движения может служить центральная симметрия отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в симметричную ей точку M_1 относительно данного центра O .

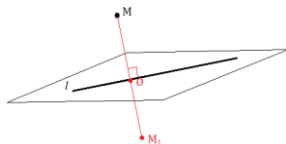
Пример 1. Найти координаты точки A_1 если известны координаты точек $A(2,6,9)$ и $O(6,7,-9)$.

Решение:

Точка O – середина отрезка AA_1 , где положим координаты точки $A(x,y,z)$, тогда используя формулу нахождения координат середины отрезка получим:

$$\frac{2+x}{2} = 6 \Rightarrow x = 12 - 2 = 10, \quad \frac{6+y}{2} = 7 \Rightarrow y = 14 - 6 = 8, \quad \frac{9+z}{2} = -9 \Rightarrow z = -18 - 9 = -27$$

Ответ: $A(10,8,-27)$.



Осевая симметрия Осевой симметрией с осью a называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в симметричную ей точку M_1 относительно оси a .

Пример 2. Найти координаты точки O принадлежащей прямой a являющейся осью симметрии, если известны симметричные точки

$M(1,2,3)$ и $M_1(-9,4,7)$.

Решение: Точка O – середина отрезка MM_1 , тогда используя формулу нахождения координат середины отрезка получим:

$$x = \frac{1-9}{2} = -4, \quad y = \frac{2+4}{2} = 3, \quad z = \frac{3+7}{2} = 5 \quad \text{Ответ: } O(-4,3,5).$$

Практическая часть:

1. Найдите координаты точек, в которые переходят точки $A(0; 1; 2)$, $B(3; -1; 4)$, $C(1; 0; -2)$ при: а) центральной симметрии относительно начала координат; б) осевой симметрии относительно координатных осей.

2. Найти координаты точки A_1 если известны координаты точек $A(-1,3,-5)$ и $O(2,-1,-3)$. Где т.А симметрична т.А₁ относительно т.О.

3. Найти координаты точки O принадлежащей прямой a являющейся осью симметрии, если известны симметричные точки $M(-1/2; 2/3; 0)$ и $M_1(-1,6,-4/5)$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

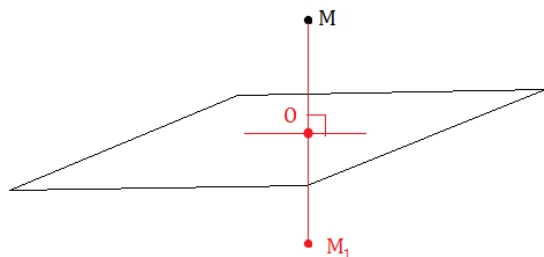
Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено

Практическая работа. Зеркальная симметрия и параллельный перенос

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: изучить понятие зеркальной симметрии и параллельного переноса.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:



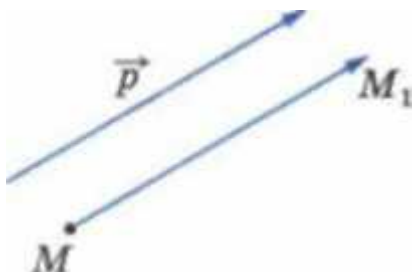
Зеркальная симметрия

Зеркальной симметрией (симметрией относительно плоскости a) называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в симметричную ей относительно плоскости a точку M_1 .

Пример. Даны координаты точки $M(2,6,9)$. Найти точку M_1 находящейся зеркально симметричной относительно координатных плоскостей xOy , xOz и yOz .

Решение:

Относительно xOy $M_1(2,6,-9)$, относительно xOz $M_1(2,-6,9)$, относительно yOz $M_1(-2,6,9)$.



Параллельный перенос

Возьмем какой-нибудь вектор p . Параллельным переносом на вектор p называется отображение пространства на себя, при котором любая точка M переходит в такую точку

M_1 , что $\overrightarrow{MM_1} = \vec{p}$.

Векторы к которым применен параллельный перенос равны (координаты x, y, z одинаковые).

Практическая часть:

1. Найдите координаты точек, в которые переходят точки $A(0; 1; 2)$, $B(3; -1; 4)$, $C(1; 0; -2)$ при зеркальной симметрии относительно координатных плоскостей.
2. Найдите координаты точек, в которые переходят точки $A(0; 1; 2)$, $B(3; -1; 4)$, $C(1; 0; -2)$ при параллельном переносе, если $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{AA_1} \{-5; 4; 4\}$
3. При какой симметрии переходит правая перчатка в левую?
4. Назовите координаты точек B и B_1 таких что к $AB(5,6,2)$ был применен параллельный перенос и получили вектор A_1B_1 , если координаты точек $A(0,0,0)$, $A_1(1,2,-2)$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться использовать поиск симметрии в своей специальности.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

КЛАССИФИКАЦИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ФОРМ В ТЕХНИКЕ

Виды симметрии подразделяются на 3 категории:

- **низшая** (отсутствуют симметрии)-,
- **средняя** (всегда присутствует одна главная ось симметрии, а также могут быть иные двойные оси, плоскости и центр симметрии);
- **высшая** (имеется несколько осей симметрии).

В технике встречаются как. простые формы так и комбинации, которые могут быть совокупностью нескольких простых форм. Комбинации» может быть практически бесчисленное множество, хотя количество исходных простых форм невелико: параллелепипед, призма, пирамида, цилиндр, шар и конус.

В кристаллографии строго доказано, что порядок оси может быть целым числом, причем возможны оси симметрии любых целых порядков от 1 до бесконечности. Очевидно, ту же самую целесообразную закономерность, установленную природой, можно рекомендовать для техники: **любой станок, машина, прибор, механизм или узел должны компоноваться вокруг установленной оси симметрии так, чтобы порядок оси симметрии характеризовался только целым числом.**

Для подавляющего большинства стационарных или передвигаемых машин, приборов, технологического оборудовании характерны вертикальные ограничивающие боковые плоскости, являющиеся прямоугольниками или весьма -близкими хорошо вписывающимися в прямоугольник фигурами. Сверху машины, приборы, технологическое оборудование, как правило, ограничиваются одной горизонтальной плоскостью. Эти плоскости могут быть реальными поверхностями (обшивки, пластины, крышки и т. д.) или поверхностями пространственных фигур, в которые мысленно вписываются габариты станка, машины, прибора. В свою очередь эти фигуры можно разлагать мысленно (объемы) или физически (узлы) на определенные составляющие. Снизу машины, приборы, технологическое оборудование ограничиваются горизонтальной плоскостью установки. Горизонтальные плоскости, ограничивающие объем машин, приборов, станков, технологического оборудования, значительно сокращают число вариаций элементов симметрии в габаритных (описываемых) объемах и приводят к тому, что классификацию машин по характеру симметрии приходится строить, ориентируясь в основном на форму проекции машин в плане (вид сверху).

Знакомство с существующими классификациями объемов (в кристаллографии) по признакам симметрии показывает, что за основу классификации стационарных и передвигаемых машинных объемов может быть взят планальный класс симметрии с неповторяющейся осью L («план» — по-гречески .плоскость). Этот класс включает следующие виды симметрии:

$L_11P = P$ (несимметричная фигура), L_22P (прямоугольник), L_33P (треугольник), L_44P (квадрат), L_55P (пятиугольник) и т. д. вплоть до $L_{\infty\infty}P$ (круг).

Изучение объемов; характерных для современного станкостроения и приборостроения, показывает, что практически не встречаются виды симметрии L_77P , L_99P , $L_{1111}P$, $L_{1212}P$, $L_{1313}P$ и выше. В то же время представляется целесообразным выделить не просто куб, как параллелепипед с равными ребрами $a=b=c$, но и два самостоятельных вида параллелепипедов $a = b \neq c$ и $a \neq b \neq c$, а также цилиндр нормальный и цилиндр с винтовой осью.

В итоге десятичная классификация габаритных объемов и технике по признакам симметрии может иметь следующую структуру:

I класс. Габаритные объемы вписываются в трехгранную призму, формы в плане образуют равносторонний треугольник.

II класс. Габаритные объемы вписываются в куб.

III класс. Габаритные объемы вписываются в параллелепипед, формы в плане образуют квадрат. :

IV класс. Габаритные объемы вписываются в параллелепипед с 3-мя неравными ребрами, формы в плане образуют прямоугольник.

V класс. Габаритные объемы вписываются в 5-гранную призму, формы в плане образуют равносторонний пятиугольник.

VI класс. Габаритные объемы вписываются в 6-гранную призму, формы в плане образуют равносторонний 6-угольник.

VII класс. Габаритные объемы вписываются в 8-гранную призму, формы в плане образуют равносторонний 8-угольник.

VIII класс. Габаритные объемы вписываются в 10-гранную призму, формы в плане образуют равносторонний 10-угольник.

IX класс. Габаритные объемы вписываются в цилиндр, стоящий на основании, узлы в сечениях симметричны относительно продольной оси симметрии цилиндра.

X класс. Габаритные объемы вписываются в цилиндр, стоящий на основании, узлы расположены по винтовой линии (симметричны относительно винтовой оси цилиндра).

Как уже указывалось, в современной кристаллографии уже выведены строго математически все возможные совокупности (классы) элементов симметрии для конечных фигур. Очевидно, в будущем, когда теория художественного конструирования сочтет возможным или даже необходимыми охватить своим влиянием все основные классы технических сооружений, в том числе и те машины и механизмы, которые будут работать в условиях невесомости или под водой, тогда может быть и станет оправданным использование в классификационных целях всего математического аппарата и методов, применяемых кристаллографией для изучения проблем симметрии. Сейчас же (имея в виду станки, технологическое оборудование, приборы, действующие транспортные средства и т. д.) в художественном конструировании это представляется преждевременным.

ВЕЛИЧИНА АСИММЕТРИИ

Создавая новый механизм, машину, прибор или станок конструктор неизбежно сталкивается с проблемой симметрии. Быть или не быть плоскостям симметрии в неподвижном приборе? Быть или не быть осям симметрии в узлах станка. Эти вопросы разрешает конструктор чаще всего, основываясь на опыте проектирования, сложившихся представлениях о рациональных конструкциях и рациональных принципах компоновки, а иногда просто на интуиции, вкусе, т. е. в значительной степени субъективно. Способствовали проявлению элементов в симметрии в конструкциях унификация и стандартизация узлов и деталей, агрегатирование. Но в целом конструкция могла как стать симметричной, так и не стать; симметрия, особенно в неподвижных машинах, никогда не была объектом специального внимания у целенаправленных забот конструктора. Твердых, вполне определенных рекомендаций по этой проблеме до сих пор не встречается; пособиях по основам конструирования; более того, не встречается даже термина «симметрия». Очень редкие высказывания, в той или иной степени касающиеся проблемы симметрии в технике, встречаются лишь в популярной литературе, рассыпаны по случайным брошюрам и журнальным статьям далеким от практики и теории современного конструирования. К тому же эти высказывания более имеют вид наивных афоризмов или общих, хотя и добросердечных, фраз о «важной» роли симметрии, нежели практических рекомендаций.

Большинство станков или приборов имеют зеркальную симметрию (фрезерные, сверлильные станки) или же радиально-лучевую симметрию (вертикально-сверлильные многошпиндельные автоматы, некоторые агрегатные станки). Вообще для современного станкостроения и приборостроения традиционными стали симметричные формы, однако немало технических задач требует применения асимметричных форм (специальные тиски со смещенными губками, ручной инструмент «под правую руку» и т. д.).

Если речь идет о стационарном технологическом оборудовании, то лучше чтобы машина была симметрична в весовом и геометрическом отношениях. Внешне машина, вернее часть ее, воспринимаемая и оцениваемая зрительно, допускает некоторую асимметрию, вернее диссимметрию, например, фирменный знак размещается в одном из углов прямоугольного относительно пустого поля (фасад станины). Если при обращении с машиной требуется активная зрительная работа, то машина может компоноваться как «левая» (смещаются влево и вверх основные индикаторы). Если же при обращении требуется активная физическая работа, то наиболее важные органы управления смещаются вправо, и машина строится как «правая».

В технике очень редко можно увидеть идеально симметричную машину, прибор, станок, механизм, инструмент. Как правило, все они диссимметричны, и в каждом узле, нарушающем в той или иной степени симметрию машины, можно найти детали, нарушающие в свою очередь симметрию узла, и т. д. Теория диссимметрии и асимметрии практически еще не построена, и в художественном конструировании на ее создание будет, по-видимому, обращено особое внимание в самое ближайшее время. Очевидно, наибольших успехов в этом на: правлении добьется тот творческий коллектив, в который наряду с художником-конструктором и инженером войдут психолог, специалист по цвету, искусствовед и обязательно математик, специализирующийся в гомологии и комбинаторике.

В современном технологическом оборудовании наблюдаются 3 основных формы нарушения симметрии:

- **весовая асимметрия** (диссимметрия);
- **геометрическая** (масса распределена симметрично, но отдельные объемы неоправданно «раздуты» контурами накладных кожухов);
- **зрительная** (геометрически и по весу уравновешенные инструкции имеют зрительно неуравновешенные фасады).

На практике могут встречаться не только отдельные формы нарушения симметрии, но и различные их сочетания. Соответственно формам нарушения симметрии можно рассматривать 3 различных величины асимметрий:

- величина весовой асимметрии E_B ;
- величина геометрической асимметрии E_T ;
- величина зрительной асимметрии E_3 .

Величина E_B характеризует станки, формы которых геометрически симметричны и зрительно уравновешены, но центр тяжести смещен в пространстве от точки пересечения трех; плоскостей симметрии описываемого параллелепипеда. Для; гаммы родственных моделей станков одного типа центр тяжести будет «бродить» в пределах эллипсоида асимметрии. Величина E_B представляется безразмерной и определяется, по формуле:

$$E_B = 1 - \frac{P_M}{P_B}$$

где P_M — меньший из весов, характеризующих геометрически симметричные половины; P_B — больший из весов. Величина E_T определяется по формуле:

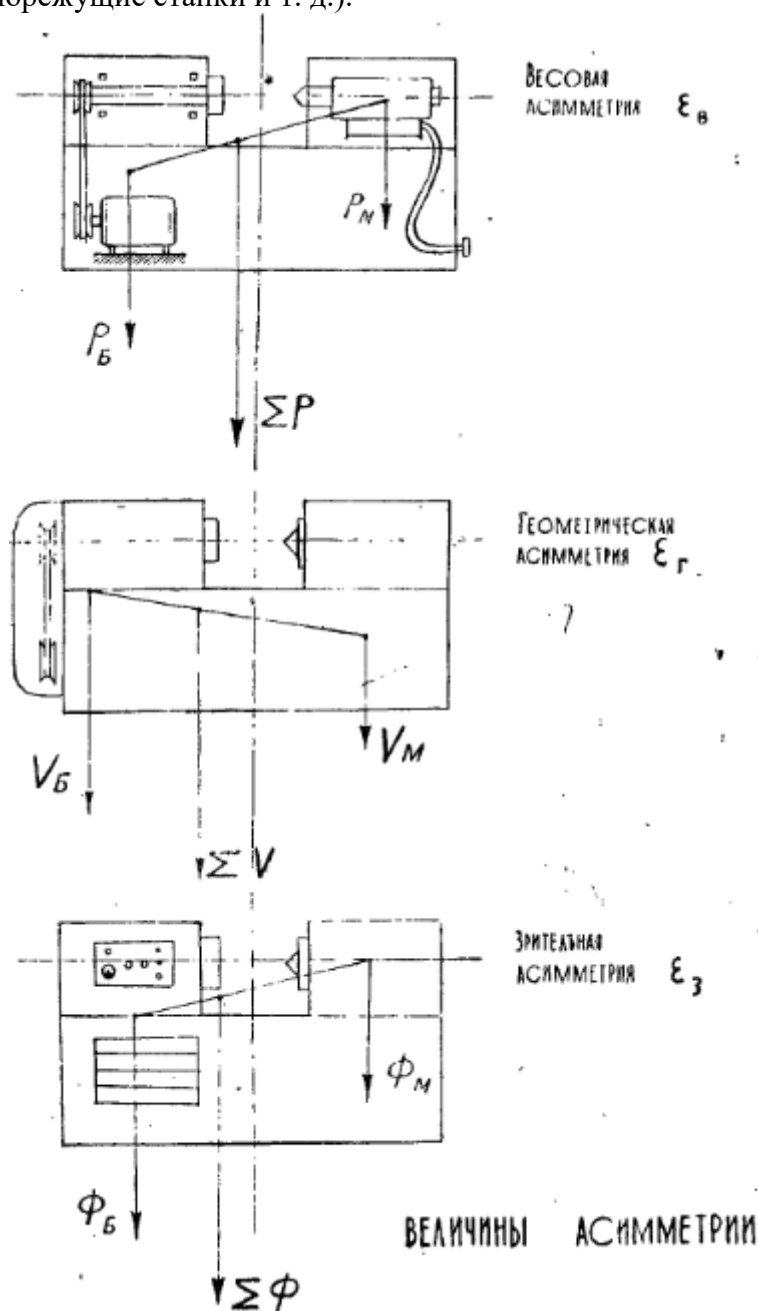
$$E_T = 1 - \frac{V_M}{V_B}$$

где V_M — меньший из объемов, характеризующих симметричные по весу половины; V_B — больший из объемов. Величина E_3 определяется по формуле:

$$E_3 = 1 - \frac{\Phi_M}{\Phi_B}$$

где Φ_M — количество узлов зрительного напряжения (или' числа фиксаций, т. е. остановок взгляда), характеризующих ту из геометрически симметричных половин, которая привлекает меньшее внимание оператора; Φ_B — количество узлов зрительного напряжения, характеризующих ту из геометрически симметричных половин, которая привлекает большее внимание оператора.

Для машин сложных форм за расчетную плоскость симметрии берется вертикальная плоскость симметрии, рассекающая главный вид описываемого параллелепипеда (автоматы и оборудование дистанционного управления), или же плоскость симметрии оператора, находящегося в наиболее удобном для управления месте (полуавтоматы, универсальные металлорежущие станки и т. д.).



Вводимые величины симметрии — понятия в технике новые и далеко не простые. Предстоит еще разработать доскональную методику их расчета, но уже сейчас можно сказать, что наиболее трудная задача — определение величины зрительной или визуальной асимметрии из-за высокого уровня ее субъективизма. Для разных наблюдателей величина ее может различаться, но это утверждение все же не исключает определенного усреднения результатов наблюдений. Эта величина будет колебаться по своим значениям в зависимости от характера членений, интенсивности и размеров цветовых пятен, особенностей ритма членений и т. д. Величины симметрии рассчитываются в основном для оценки объемных композиций, но могут быть использованы и для оценки плоскостных композиций, например, для плоских решетчатых конструкций. Каждая из этих величин может использоваться в целях анализа как самостоятельно, так и в комплексе друг с другом.

Величины асимметрии могут совпадать, но могут и различаться по своим значениям в зависимости от целей поставленных конструктором, эргономистом и художником-конструктором. Величины E_z и E_v могут не совпадать, например, при зеркальной компоновке одинаковых по форме, но различающихся по весу узлов. Требования максимальной компактности конструкции приводят к тому, что E_v чаще всего бывает мала, но неряшливость отработки внешнего вида плоскостей и объемов машины приводит к тому, что E_z становится ощутимой величиной, несравнимо и неоправданно большей по сравнению с E_v . По-видимому, сводя до нуля излишнюю для оператора информацию можно требовать от большинства современных стационарных конструкций снижения E_z до возможно малой величины (если это не противоречит требованиям инженерной психологии). Величина зрительной асимметрии может (но не всегда должна) быть выше величин весовой и геометрической асимметрии для конструкций, передвигаемых, перевозимых, переносимых, а также в тех случаях, когда это оправданно отражает и подчеркивает геометрическую и особенно весовую асимметрию, неизбежную в компоновке создаваемой конструкции.

СИММЕТРИЯ И ПРОПОРЦИИ

«Но невозможно сочетать две вещи без наличия третьей, между ними необходим связующий элемент. Нет лучше связи, чем та, которая образует из самой себя и связуемых ею вещей одно и неделимое целое. И такова природа пропорций — писал много веков тому назад известный мыслитель древнего мира Платон. И в геометрии, и в механике, и в архитектуре, и в музыке, и во множестве иных областей искусства, науки и техники понятие пропорций уже давно срослось с объектами, рассматриваемыми в этих областях и стало одной из наиболее важных и, казалось бы, весьма ясных характеристик рассматриваемых явлений. И тем не менее каждая новая попытка анализа пропорций приносит новые неожиданные плоды. Не лишена смысла попытка пересмотреть понятие пропорции с точки зрения связей ее с симметрией.

Рассмотрим связи симметрии в станках.

В станке существует тесная взаимосвязь между пропорциями, жесткостью, массой, величинами частот собственных колебаний (шириной спектра частот собственных колебаний). Изменение любой из этих величин вызывает естественное изменение других. Причем, взаимосвязь эта характерна не только для станка в целом, но и для отдельных его узлов и деталей. Вот почему теория колебаний дает возможность установить наиболее удачные пропорции конструкций, отодвигающие эксплуатационные условия работы машин возможно дальше от условий возникновения больших колебаний (математический аппарат см. в лекции «Пропорции в технике»).

Рациональное решение вопросов жесткости и веса уже само по себе приводят конструктора к простой, симметричной, замкнутой, устойчивой форме станка с низким центром тяжести. Станок, компактно собранный в одну массу, не содержащий резко выступающих отдельных частей удобен также при транспортировке и в обслуживании, и, имея четкие габаритные пропорции, говорит о высокой технической культуре его создателей. На правильном распределении масс узлов, их жесткости, а также пропорциях станка в целом серьезно сказывается выделение основных конструктивных геометрических осей еще на начальной, эскизной стадии проектирования. С точки зрения главных геометрических осей станка компоновка может быть: горизонтальной, вертикальной, наклонной, смешанной (без четкого выделения направления основной оси компоновки). Наибольшее число диспропорциональных по форме станков приходится именно на последний, смешанный тип компоновки, поэтому ее следует по возможности избегать. Четкое распределение объемов и масс вокруг основной принятой геометрической оси станка приводит к созданию простых, монолитных форм станка и, как следствие, к сужению ширины спектра частот собственных колебаний всего станка в целом. В заводских условиях на работающий станок действует широкий спектр частот возбуждающих колебаний, связанных с ходом различных производственных процессов и значительно различающихся по величине и направлению. Близость или совпадение с частотой возбуждающих колебаний даже одной из шести частот какой-либо детали, узла или всего станка в целом приводит к неоправданно

быстрому снижению точности и производительности станка, уменьшению срока его службы. Выбор частот собственных колебаний посредством установления рациональных пропорций его размеров является таким образом одним из средств продления сроков его работоспособности. Поэтому, проектирование пропорций станка при известной массе и заданной жесткости становится одной из основных задач конструктора.

С точки зрения рационального распределения масс, большей жесткости, сохранения точности, работоспособности, технологичности изготовления, легкости сборки, транспортировки и обслуживания представляется одной из наиболее выгодных и рациональных форма станка, вписывающаяся в параллелепипед с равномерно распределенной по объему массой, на четырех опорах симметрично расположенных под углами его основания. Должны быть обеспечены не только компактность конструкции, цельность объема, отсутствие громоздких и сильно выделяющихся по размерам деталей и узлов, но также достаточно равномерное распределение их по объему станка.

Современная практика убедительно показала, что наиболее рациональный вид установки станка — это бесфундаментный на резиновых прокладках или амортизаторах. Это значительно снижает уровень шума в цехе и увеличивает виброустойчивость станка. Расчет пропорций станков, установленных подобным образом, наиболее прост. В общем случае движение твердого тела на упругих элементах, опирающихся на неподвижное основание, описывается системой из шести однородных дифференциальных уравнений. Пренебрегая демпфированием, а также, считая, что станок обладает двумя плоскостями симметрии и не имеет перекосов, можно свести систему к виду более удобному для инженерных расчетов.

Система уравнений распадается на четыре независимые группы, легко разрешимые относительно частот собственных колебаний станка (колебания вдоль и вокруг вертикальной оси и сложные колебания в вертикальных взаимноперпендикулярных плоскостях). Переходя от габаритных размеров к пропорциям, мы получаем выражения, в которых между собой связаны частоты собственных колебаний станка, его масса, величины жесткостей опор, на которые установлен станок и габаритные пропорции.

Применение цифровых вычислительных машин позволяет создать многочисленные таблицы, номограммы и графика (связывающие частоты собственных колебаний станка с его пропорциями, массой и жесткостью, которые значительно упрощают порядок конструирования, являясь исключительно ценным пособием для художников-конструкторов. Рассматриваются конструкции не только с совмещенными весовой и геометрической плоскостями симметрии, но и с несовмещенными плоскостями, причем жесткости опор в направлении различных осей координат могут различаться. Сравнительный анализ данных позволяет выяснить, насколько при расчетах пропорций конструкций реальные объемы с несовмещенными весовой и геометрической плоскостями симметрии; могут быть заменены более простыми объемами с совмещенными плоскостями симметрии и усредненными жесткостями опор. Эти допущения в значительной степени упрощают расчет и выбор пропорции при художественном конструировании станков и оборудования. В этом случае расчет пропорций может быть заменен подбором и проверкой пропорций.

Некоторые рекомендации советуют снижать центр тяжести конструкции для повышения ее устойчивости. Следует учесть, что при низком центре тяжести конструкции, вертикальная координата центра тяжести принимает настолько малые значения в сравнении с двумя другими координатами, что в расчетах ее можно не учитывать, принимая равной нулю. В связи с этим можно заметить, что из расчетных уравнений исчезает величина, которая учитывает пропорции главного вида станка, что означает практически отсутствие влияния этого вида пропорций на частоты собственных колебаний станка. Снижая центр тяжести, конструктор обретает большую свободу в решении пропорций станка в плане. К сожалению, сильное снижение центра тяжести станка вызывает серьезные конструктивные возражения. Поэтому при разработке пропорций станка к снижению центра тяжести надо стремиться, но не делать это самоцелью.

Следует отметить, что возможно более компактные пропорции в присутствии плоскостей симметрии сближают собственные частоты станка. При отсутствии весовой симметрии роль пропорций сводится к нулю. Если же размещены произвольно опоры, то сводится к нулю роль симметрии, так как все колебания будут связаны между собой — вычисление и защита от вибраций становится трудной. Размещение опор в станке обычно оговорено конструкцией и почти всегда оно симметрично. Вес и жесткость станка также определяются требованиями технологического процесса. Поэтому сближать частоты практически можно только введением плоскостей симметрии, выбором жесткости опор и изменением, габаритных пропорций станка. Следует, безусловно, стремиться к тому, чтобы контуры станка возможно более полно заполнили объем описанного параллелепипеда, но трудно с полной ответственностью рекомендовать, чтобы все станки по контурам, все их узлы и детали укладывались точно в простейшие флуктуация меры «предельной» цельности и выразительности пропорций. В пределах этих отклонений, очевидно, все-таки весьма небольших, художник-конструктор вправе отходить от «голых» и монотонных прямоугольников ради действительной выразительности пропорций. Само по себе внешнее соблюдение принятых архитектурных пропорций при проектировании вряд ли принесет пользу конструкции и даже более того, в некоторых случаях может привести к неоправданному занижению срока службы станка. Таким образом, становится ясно, что проектирование рациональных архитектурных пропорций станка требует от конструктора не просто художественного вкуса, но главное — большой технико-экономической культуры.

В итоге можно сделать следующие выводы:

- в основе рациональных пропорций станков лежат не только требования конструктивной схемы, но и закономерности, связывающие габаритные пропорции с частотами собственных и возбуждающих колебаний, внутренним распределением масс, жесткостью конструкции и опор;

- равномерное распределение узлов по объему станка вокруг принятой геометрической оси, введение весовых и геометрических плоскостей симметрии в конечном итоге сказывается положительно на длительном сохранении точности станка;

- снижение центра тяжести станка при сохранении вертикальных плоскостей симметрии и рационально выбранных его пропорциях в плане позволяет проектировать главный вид станка, исходя из удобства обслуживания и оптимальных зрительных ощущений;

- применение в пропорциях станков решений основанных на оптимальных зрительных ощущениях (в частности корректировка, ритмизация пропорций), следует рассматривать с учетом конструктивной схемы станка, частот собственных и возбуждающих колебаний, распределения масс по объему станка, жесткости конструкции и опор; каждому станку должны соответствовать свои строго оправданные рациональные пропорции.

В заключение отметим терминологическую специфику обсуждаемого вопроса. Обычно под пропорциями понимается соразмерность, закономерность соотношения частей между собой и целым, указывая при этом, что правильно найденные пропорции придают предмету эстетическую выразительность, гармоническую завершенность. Это понимание пропорций характерно в основном и для этой работы. Но проведенное обсуждение вопроса приводит к логическому выводу, чтобы свести проблемы симметрии и пропорций к чисто геометрическим соотношениям формы — это значит перевести основы композиции в художественном конструировании на рельсы: чисто формалистических исканий в отрыве от закономерностей и особенностей компоновки современных конструкций. По-видимому, под пропорциями следует понимать не просто соотношения каких-то размеров тела, в том числе и габаритных, как мы это воспринимаем обыденно и как это без оговорок принимает и архитектурное проектирование и художественное конструирование. Куда более правильной и глубже понимать под пропорциями соотношения всех основных элементов, образующих форму каждого предмета (т. е. соотношение распределенных по данному объему масс, жесткости, величины симметрии или же асимметрии и, наконец размеров, площадей и объемов).

РИТМ ПРОПОРЦИЙ

Старинный тезис Платона: «Порядок во всех отношениях превосходнее беспорядка», примененный к пропорциям в технике заставляет подумать о сведении существующего хаоса пропорций (объемов, плоскостей) к одной пропорции или к семейству родственных пропорций. Только корректировка, гармонизации пропорций различных машинных форм, отличающихся размерами и выполняемыми функциями, может создать ритмический ряд объемов и плоскостей. В последние годы интерес к гармонизированным пропорциям как одному из важнейших средств ритмизации резко возрос в связи с быстрым развитием художественного конструирования и его теории. Выявилась особая роль пропорций, теперь уже на стыке техники и искусства, необходимость разработки научно обоснованных методов расчетами корректировки пропорций конструкций. Переосмысление под этим углом зрения значительного фактического материала, накопленного архитектурой, позволяет выделить одну важную закономерность корректировки пропорций, полезную в технике.

Выявленная закономерность имеет с одной стороны ясный числовой, а с другой стороны простой геометрический смысл: в основе архитектурно-художественной корректировки любой системы пропорций лежат схемы-сетки, при построении которых берутся в качестве исходных простейшие геометрические фигуры, соотношения размеров которых определяются рядом достаточно малых и простых целых чисел. Это положение нашло практическое отражение в методике архитектурно-художественной отработки проектов циркулем и линейкой и в архитектурном законе применения в пропорциях малых целочисленных отношений. Что же касается графических методов, визуальной гармонизации форм конструкции (наложение схем-сеток, вычерченных циркулем и линейкой), то все они сводятся к следующей формулировке, одобрительно воспринимаемой многими искусствоведами: «Гармония есть результат повторения основной формы произведения в его частях».

С давних времен в литературе укоренилось утверждение, что корректировка пропорций должна производиться па основе так называемого золотого деления или иначе — золотого сечения. Особенно способствовали этому исследования известного психофизиолога Г. Т. Фехнера, которого считают основателем экспериментальной эстетики. В 1876 году Фехнер провел ряд «эстетически-статистических» опытов, предлагая разным группам людей, выбрать среди нарезанных бумажных прямоугольников (включая квадрат) такую форму, которая им больше всего понравится. Для большинства наблюдателей оказался притягательным прямоугольник, выполненный со сторонами, отношение которых составляло $\Phi = 1,618...$ По общепризнанной терминологии такой прямоугольник считался выполненным в золотом сечении. Отношение Φ получается в результате деления отрезка прямой на две неравные части так, чтобы большая так относилась к целому, как меньшая к большей. Здесь отметим следующее. Верхняя граница отклонений, не воспринимаемых человеческим, глазом, равна 0,02—0,03. Очевидно, в пределах этих отклонений от отношения 1,618... пропорции могут восприниматься большинством наблюдателей в золотом сечении. Несложные подсчеты показывают, что в художественном конструировании в золоток сечении следует считать выполненными те пропорции, которые лежат в пределах отношений 1,57—1,67. Это и есть те психофизиологические границы точности, с которой следует выявлять золотое сечение в технике (а возможно и не только в технике).

В настоящее время уже известны несколько попыток распространить коррекцию пропорций по золотому сечению н на машиностроение. Но для того, чтобы эти попытки имели успех, следовало предварительно ответить, по крайней мере, на два вопроса. Почему именно золотое число следует выбирать в качестве основы для коррекций пропорций? Каковы законы коррекции пропорций на основе золотого деления? Что касается выделения золотого сечения как особой пропорции, то убедительных научных объяснений этого феномена до сих пор в литературе, не встречается. «Опыты Фехнера Г. его статистика,— заключает известный искусствовед М. Бориссавлевич в своей недавней биографии о золотом сечении, — так же как формы большинства широко-используемых предметов (визитных карточек, конвертов, книг, зеркал и многого другого) вполне доказывают эту

закономерность. Никто, до сих пор, не может объяснить, почему это сечение, базирующееся на золотом числе, красиво, почему оно доставляет нам эстетическое наслаждение?» (Подробнее о золотой сечении, а также об анализе этого феномена и результатах анализа см. лекцию «Пропорции в технике»).

Стремясь выполнить пропорции станков не только функционально оправданными, но и эстетически выразительными, конструктор сталкивается с практическими вопросами, на которые не находит ответа в современной теории художественного конструирования. Если признать, что пропорции станков, выполненные в золотом сечении, более привлекательны, то как применять золотое сечение — в габаритных пропорциях или в каждой крышке и каждом болте? Применять золотое сечение только при вертикальном членении станка (как у человека, у него ведь золотое деление определяется как отношение" всей длины тела к его части), при горизонтальном членении или строить в золотом сечений взаимно перпендикулярные габаритные размеры? А если контур станка имеет сложный характер? Может и в диагональных членениях его применять? Тогда какова вообще система применения золотого сечения или какова по сути дела общая методология схемы пропорций в формах машины? -

Количество подобных вопросов можно было бы легко продолжить, но к сожалению, вполне определенных и научно обоснованных ответов на них нет. Теоретическая путаница приводит на практике к тому, что конструктор, отчаявшись разобраться в «выразительных» пропорциях вообще отмахивается от них или же вспоминает их весьма бессистемно. Оговорки о том, что золотое сечение не единственное благоприятное Соотношение (мол есть и другие!) ничего не изменяет, так как эти другие никогда в литературе по художественному конструированию не приводятся. Вот и сводится все к золотому сечению: или применяй его конструктор, или вообще отворачивайся от сознательной отработки и корректировки пропорций. Сводя всю проблему пропорций к золотому сечению и подгоняя под него случайную пару размеров, конструктор искренне считает, что он выполнил твой долг перед художественным конструированием.

Предполагалось использовать в современном машиностроении известную в архитектуре систему координации геометрических параметров, созданную Ле Корбюзье и известную под названием «Модулар». Числовые величины этой системы увязаны между собой, образуя геометрические ряды величин со знаменателем $1/\Phi = 0,618...$ Но эта система мер, основанная на размерах человеческого тела и золотом сечении, не может быть использована в технике по следующим трем*основным причинам. Во-первых, при вычислении членов рядов системы «Модулар» неизбежно получаются дробные числа, которые впоследствии Ле Корбюзье пришлось округлять с точностью до ± 7 мм. Во-вторых, принятый для расчета числовых величин системы условный рост 183 см пригоден для использования только в одной из стран мира — Судане, где средний рост близок этой величине. Во всех остальных случаях размеры, принятые по системе «Модулар» оказываются завышенными, так как средние роста мужчин по странам характеризуются следующими значениями: США — 176 см, СССР—168 см, Франция—175 см, Германия — 173 см, Япония—164 см и т. д. К тому же средний рост женщин, работающих во многих отраслях промышленности, еще на 7—8% меньше среднего роста мужчин. И, наконец, в-третьих, систему «Модулар» практически невозможно увязать с рекомендациями Международной Организации стандартов (ИСО), рекомендовавшей проектным организациям и конструкторам всех стран мира использовать специальные ряды предпочтительных чисел.

Другие системы координации геометрических параметров, используемые в архитектуре и рекомендуемые для использования в машиностроении в той или иной степени связаны с системой «Модулар» и, конечно, страдают теми же недостатками. Все они представляют собой абстрактные схемы-сетки пропорций, в которые должны вписываться формы конструкции, независимо от их функционального назначения. Совершенно ясно, что в технике не может быть строгого соответствия' даже основных пропорций различных конструкций делениям шкал, основанных па золотом сечении, или какой-то иной выбранной целой, дробной или иррациональной величине. Большинство размеров конструкций

диктуется чисто техническими соображениями, согласно которым она рассматривается прежде всего как работоспособный механизм. Однако, эти требования не исключают возможность корректировки размеров в соответствии с рекомендациями ИСО, а следовательно, не исключают возможность корректировки пропорций форм, т. е. их гармонизации в соответствии с эстетическими требованиями.

Исследования в архитектуре и других областях изобразительного искусства, проведенные советским исследователем В. Ф. Кринским, показали, что здесь люди невольно, сами того не замечая, применяли, весьма ограниченное число пропорций — всего 139 различных отношений, которые дают числа натурального ряда от 1 до 21. Безусловно, что более высокий уровень точности конструирования в машиностроении требует более обширной и гибкой системы предпочтительных пропорций, которая явится первым шагом к созданию в конструкциях ритмических рядов функционально обоснованных и откорректированных пропорций.

СИСТЕМА ПРЕДПОЧТИТЕЛЬНЫХ ПРОПОРЦИЙ-

Система предпочтительных пропорций построена на основе системы предпочтительных чисел, предложенной ИСО. Эти системы симметричны по принципам построения, числу членов и другим характерным особенностям. Напомним, что система предпочтительных чисел включает всего 5 рядов геометрических прогрессий R5, R10, R20, R40, R80, имеющих соответственно 5, 10, 20, 40, 80 членов и знаменатели прогрессий $\sqrt[5]{10}$, $\sqrt[10]{10}$, $\sqrt[20]{10}$, $\sqrt[40]{10}$, $\sqrt[80]{10}$. Каждый из рядов ограничивается членом 1,0 в качестве нижнего предела и членом 10 (в качестве верхнего предела). Предпочтение отдается рядам с более крупной градацией: R5 предпочитается ряду R10, R10 предпочитается R20 и т. д.

В настоящее время в машиностроении наблюдается возрастающая тенденция использования рядов предпочтительных чисел, включающих все большее число градаций. Учитывая это, покажем, как строится наиболее сложный и полный ряд предпочтительных пропорций П80 на основе ряда R80, который содержит 80 предпочтительных пропорций. Все предыдущие ряды можно легко построить выборочно (отбрасывая каждый второй член более дробного ряда).

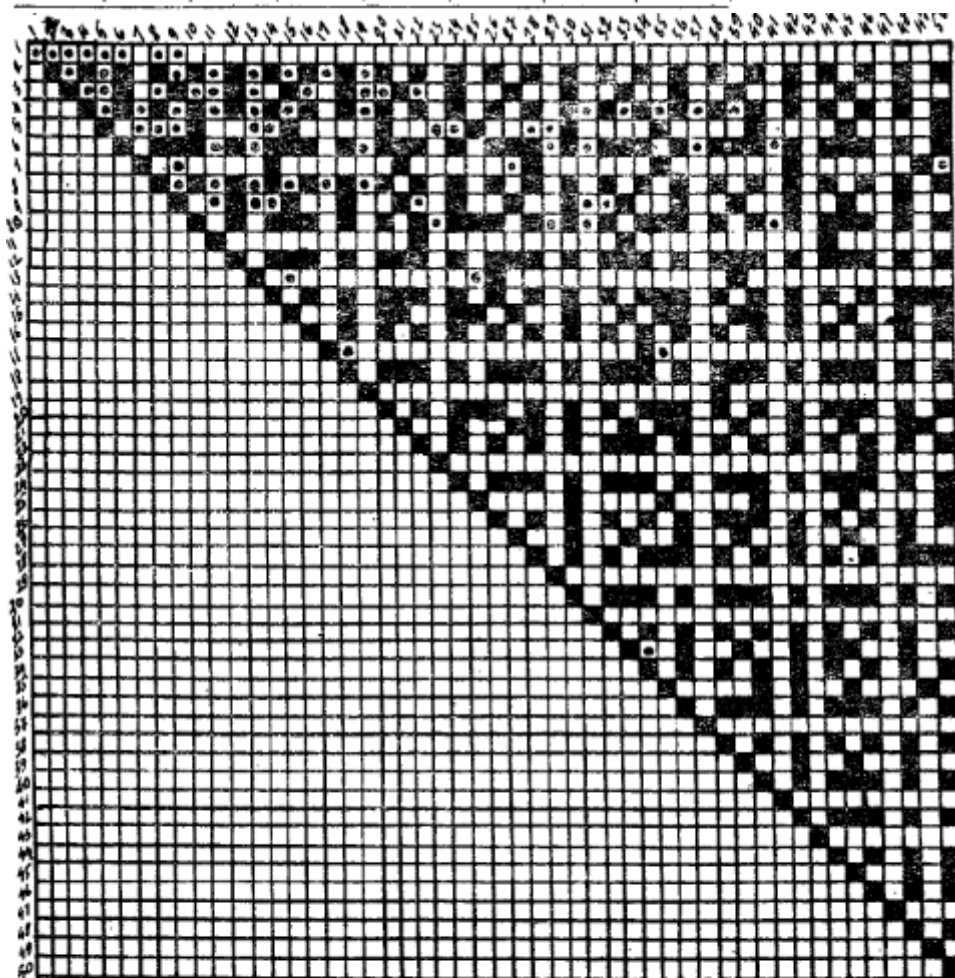
Эксперименты показали, что при сравнении пропорций различных предметов отклонения менее 2—3% глазом не воспринимаются. Это означает, что если построить, например, ряд прямоугольников, одна из сторон которых будет последовательно увеличиваться в 1,02—1,03 раза, то разницы в пропорциях соседних прямоугольников мы не заметим — они будут восприниматься одинаковыми. Поэтому величина отклонения в пропорциях, равная 0,02—0,03, будет вполне пригодна для построения ряда предпочтительных пропорций в практических целях. Взяв за основу ряда 1,0 и увеличивая его последовательно на одну и ту же величину 0,02—0,03, мы будем иметь плавно возрастающий ряд предпочтительных пропорций в виде геометрической прогрессии со знаменателем $K = 1,02—1,03$. Сравнение знаменателя ряда предпочтительных пропорций 1,03 со знаменателями десятичных- рядов геометрических прогрессий, установленных ИСО показывает, что за основу ряда предпочтительных пропорций может быть взят ряд чисел R80 со знаменателем прогрессии $\sqrt[80]{10} = 1,02938 \approx 1,03$.

Относительная разность между смежными членами ряда R80, сохраняется на протяжении всего ряда 3%. Членами ряда являются округленные числа, при этом относительная разность между расчетными и округленными числами находится в пределах от +1,26 до —1,23%.

Каждому из членов этого ряда были подобраны соответствующие отношения, причем было доказано, что этих отношений достаточен ряд натуральных чисел от I до 50. Результаты этого выбора отражены в таблице 2, причем отношения подобраны так, что расчетные ошибки округления уменьшены по сравнению с рекомендациями ИСО и находятся в пределах от + 1,24% до —0,88%. Звездочками отмечены nereкомендуемые отношения.

Таблица 1.

1,00	1,32	1,80	2,35	3,15	4,25	5,60	7,50
1,03	1,36	1,85	2,43	3,25	4,37	5,80	7,75
1,06	1,40	1,90	2,50	3,35	4,50	6,00	8,00
1,09	1,45	1,95	2,58	3,45	4,62	6,15	8,25
1,12	1,50	2,00	2,65	3,55	4,75	6,30	8,50
1,15	1,55	2,16	2,72	3,65	4,87	6,50	8,75
1,18	1,60	2,12	2,80	3,75	5,00	6,70	9,00
1,22	1,65	2,18	2,90	3,87	5,15	6,90	9,25
1,25	1,70	2,24	3,00	4,00	5,30	7,10	9,50
1,28	1,75	2,30	3,07	4,12	5,45	7,30	9,75



Ряд предпочтительных пропорций П80. Зачерненные ячейки обозначают пропорции, сводимые к уже имеющимся; светлые ячейки — несводимые. Точками отмечены члены ряда П80.

ПРЕДПОЧТИТЕЛЬНЫЕ ПРОПОРЦИИ.

Таблица 2.

1:1	4:3	9:5	19:8	19:6	17:4	17:3	15:2
34:33*	11:8	11:6	17:7	13:4	13:3	29:5*	31:4*
18:17	7:5	15:8	5:2	10:3	9:2	6:1	8:1
12:11	10:7	25:13*	13:5	17:5	10:3	31:5*	33:4*
9:8	3:2	2:1	8:3	7:2	19:4	19:3	17:2
15:13	11:7	35:17*	11:4	11:3	24:5*	13:2	35:4*
13:11	8:5	15:7	14:5	15:4	5:1	20:3	9:1
П:9	13:8	11:5	29:10*	27:7*	26:5*	34:5*	37:4*
5:4	5:3	9:4	3:1	4:1	16:3	7:1	19:2
9:7	7:4	7:3	31:10*	41:10*	11:2	23:3*	39:4*

Как уже отмечалось выше, приведенный ряд предпочтительных пропорций П80 построен на основе ряда R80, а ряды П40, П20, П10 и П5, соответствующие рядам R40, R20, R10 и R5, легко строятся на основе базового ряда отбрасыванием каждого второго члена предыдущего ряда. Так из ряда П80, отбрасывая каждый второй член по порядку, получают ряд П40. Отбросив в полученном ряду П40 каждый второй член, получаем ряд П20 и далее так же ряды П10 и П5. Предпочтение следует отдавать рядам с более крупной градацией: П5 предпочитается ряду П10, ряд П10—ряду П-20 и т. д. При анализе системы предпочтительных пропорций выявляется любопытная связь ее с золотым сечением, а следовательно, и с системами, построенными на золотом сечении («Модуль» и др.). Так как граница отклонений, воспринимаемых человеческим глазом, равна (2—3)%, то в пределах этих отклонений от отношения 1,618... пропорции будут восприниматься большинством наблюдателей в золотом сечении. Несложные подсчеты показывают, что в художественном конструировании следует считать выполненными в золотом сечении те пропорции, которые лежат в пределах отношений 1,57—1,67. Но тогда знаменатель ряд П5 (R5), равный $\sqrt[5]{10} \approx 1,6$, может быть принят с ошибкой меньшей, чем 0,8% для наблюдателя за числом Ф. Следовательно, золотое сечение и его производные могут считаться частным случаем системы предпочтительных пропорций.

Рекомендуется следующий порядок пользования системой предпочтительных пропорций при отработке функциональных пропорций в машиностроении:

- устанавливают габаритные пропорции станка;
- по таблице предпочтительных пропорций подбирают семейство отношений, кратных этой пропорции, причем семейство подбирают так, чтобы его охватывал возможно меньший, по численности ряд предпочтительных пропорций (например, если габаритные пропорции станка 3:1, то выписывают отношения- 3:1, 3:2, 4:3, 5:3, 8:3 и т. д.);
- в соответствии с принятым семейством предпочтительных пропорций прорабатывают пропорции тех узлов, которые будут определять внешний облик станка.

Применение системы предпочтительных пропорций приносит художественному конструированию следующие выгоды:

- ликвидирует хаос пропорций и создает благоприятную основу для выявления ритма пропорций (ритмических рядов пропорций);
- улучшает согласование между собой не только отдельных узлов и деталей, но и конструкций в целом (ансамбль машин);
- дает возможность перейти к определенной стандартизации соотношений элементов технических форм, не ограничивая в то же время творческой свободы художников-конструкторов.

Практическая часть:

Ответьте письменно на вопросы:

1. Постройте классификацию симметричных форм в технике. Проиллюстрируйте ее примерами.
2. Что такое величина асимметрии и чем она измеряется? Проведите на удобных для Вас конструкциях (машинах, приборах) измерение этой величины.
3. Каким образом связаны в технике пропорции и симметрия?
4. Как осуществляется гармонизация (коррекция) пропорций? Какие исходные теоретические положения лежат в основе гармонизации пропорций? Почему для гармонизации пропорций в технике затруднительно использовать золотое сечение и систему «Модуль» Ле-Корбюзье?

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Решение задач на многогранники, цилиндр, конус и шар

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решения задач на нахождение объема цилиндра, конуса и шара.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Теоретический материал описан в практических работах:

[Практическая работа. Формулы объема цилиндра.](#)

[Практическая работа. Формулы объема пирамиды, конуса.](#)

[Практическая работа. Формулы объема шара и площади сферы.](#)

Практическая часть:

1. В цилиндр вписан шар. Найдите отношение объемов цилиндра и шара.
2. Найдите объем конуса, если радиус его основания равен 6 дм, а радиус вписанной в конус сферы равен 3 дм.
3. В шар вписана пирамида, основанием которой является прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 2 см. Найдите площадь поверхности и объем шара, если каждое боковое ребро пирамиды составляет с основанием угол α .
4. Цистерна имеет форму цилиндра, к основаниям которого присоединены равные шаровые сегменты. Радиус цилиндра равен 1,5 м, а высота сегмента равна 0,5 м. Какой длины должна быть образующая цилиндра, чтобы вместимость цистерны равнялась 50 м³?
5. Будет ли плавать в воде полый медный шар, диаметр которого равен 10 см, а толщина стенки: а) 2 мм; б) 1,5 мм? (Плотность меди 8,9 г/см³.)

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Решение задач на нахождение объема многогранников

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решения задач на нахождение объема многогранников.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

<i>Тело</i>	<i>Объём</i>	<i>Площадь боковой поверхности</i>	<i>Площадь полной поверхности</i>
<i>Прямоугольный параллелепипед</i>	$V=abc,$	$S_{бок}=2(ac+bc),$	$S_n=2(ab+bc+ac),$
<i>Куб</i>	$V=a^3$	$S_{бок}=4a^2$	$S_n=6a^2$
<i>Призма</i>	$V= S_{осн} \cdot h$	$S_{бок}= P_{осн} \cdot h$	$S_n= 2S_{осн} + S_{бок}$
<i>Пирамида</i>	$V= \frac{1}{3} S_{осн} H$	$S_{бок}= \frac{1}{2} P_{осн} \cdot H$	$S_n= S_{осн} + S_{бок}$

Практическая часть:

1 вариант

1. Заполните таблицу

Объем пирамиды	?	Объем призмы
?	a^3	?

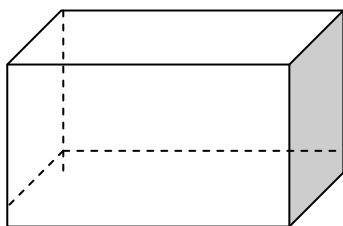
2. Площадь полной поверхности куба равна 6 см^2 . Найдите его объем.

- а) 1 см^3 ; б) 2 см^3 ; в) $1,5 \text{ см}^3$.

3. Определите верно утверждение или нет.

- А. Единицей измерения объемов является объем куба, длина ребра которого принимается за единицу измерения длины.
Б. Объем пирамиды равен произведению площади основания на высоту.

4. Основание прямой призмы – прямоугольник со сторонами 4 см и 6 см, высота 3 см. Найдите объем призмы.



- а) 30 см^3 ; б) 72 см^3 ; в) 72 см^2 .

5. Измерения прямоугольного параллелепипеда 15 м, 50 м, 36 м. Определите ребро куба, равновеликого прямоугольному параллелепипеду.

- а) 9 м; б) 30 м; в) $3\sqrt{7}$ м.

2 вариант

1. Заполните таблицу

Объем куба	?	Объем пирамиды
?	$V = S_{\text{осн}} \cdot h$	?

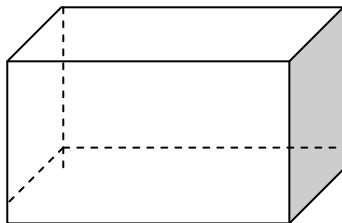
2. Объем куба равен 8 м^3 . Найдите площадь полной поверхности этого куба.
а) 96 м^2 ; б) 24 м^2 ; в) 16 м^2 .

3. Определите верно утверждение или нет.

А. Объем единичного куба равен единице.

Б. Объем призмы равен произведению площади основания на высоту.

4. Основание прямой призмы – квадрат со стороной 2 см, высота 6 см. Найдите объем призмы.



а) 24 см^3 ; б) 12 см^3 ; в) 10 см^2 .

5. Измерения прямоугольного параллелепипеда 25 м, 10 м, 32 м. Определите ребро куба, равновеликого прямоугольному параллелепипеду.

а) 1,8 м; б) 3 м; в) 20 м.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Решение задач на нахождение объема тел вращения

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решения задач на нахождение объема тел вращения.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Задача 1. Вычислите объем и площадь полной поверхности цилиндра, если известны его радиус и высота (длина образующей)

Решение: $S_{n.n} = S_{б.н} + 2S_{осн}$, где $S_{б.н} = 2\pi Rh$, $S_{осн} = \pi R^2$, $V = S_{осн} \cdot h$

Задача 2. Вычислите площадь осевого сечения, площадь полной поверхности и объем конуса, если известны его радиус и образующая.

Решение: $S_{о.с} = \frac{1}{2} d \cdot h$, $S_{n.n} = S_{б.н} + S_{осн}$, $S_{б.н} = \pi Rl$, $S_{осн} = \pi R^2$, $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$

Задача 3. Дана площадь сферы, нужно найти объем, или наоборот дан объем, нужно найти площадь сферы.

Решение. Нужно из одной формулы выразить радиус и подставить в другую.

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad S = 4\pi R^2$$

Задача 4. Если обозначить радиус шара R , радиус сечения r , а расстояние от центра шара до плоскости сечения – m , то эти величины связаны формулой

$$R^2 = r^2 + m^2$$

Задача 5. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

Решение. Площадь боковой поверхности цилиндра $S_{б.н.} = 2\pi Rh$ площадь осевого сечения $S_{о.с} = dh = 2Rh$, $S_{n.n} = S_{б.н} + 2S_{осн}$, связав эти формулы мы можем найти площадь основания, из формулы площади основания выразить радиус, из формулы площади осевого сечения или боковой поверхности найти высоту, затем посчитать объем цилиндра.

Практическая часть:

Решите задачи:

1. Вычислите объём и площадь полной поверхности цилиндра, если его радиус $R=3$ см, а длина образующей 5 см.
2. Вычислите площадь осевого сечения, площадь полной поверхности и объём конуса, если его радиус равен 4 см, а образующая 5 см.
3. Площадь сферы равна 4π , найдите ее объём.
4. Найдите расстояние от центра шара до плоскости сечения, если радиус шара – 6 см, а радиус сечения - $3\sqrt{3}$ см.
5. Площадь осевого сечения цилиндра 30 см^2 , площадь полной поверхности $48\pi \text{ см}^2$. Найдите объём цилиндра.
6. Найдите площадь полной поверхности и объём конуса, который получается в результате вращения прямоугольного равнобедренного треугольника с гипотенузой $6\sqrt{2}$ см. вокруг катета.
7. Как относятся объём правильной четырехугольной призмы и вписанного в нее цилиндра?

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Раздел 8. Начала математического анализа

Практическая работа. Числовая последовательность

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться вычислять различные члены последовательности.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Определение 1. Функцию $y = f(x)$, $x \in \mathbb{N}$ называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают: $y = f(n)$ или $y_1, y_2, y_3, \dots$ или (y_n) .

В данном случае независимая переменная - натуральное число. Способы задания числовой последовательности.

Словесный способ.

Правила задания последовательности описываются словами, без указания формул или когда закономерности между элементами последовательности нет.

Пример 1. Последовательность простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,

Пример 2. Произвольный набор чисел: 1, 4, 12, 25, 26, 33, 39,

Пример 3. Последовательность чётных чисел 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...

Аналитический способ.

Любой n -й элемент последовательности можно определить с помощью формулы.

Пример 1. Последовательность чётных чисел: $y = 2n$.

Пример 2. Последовательность квадрата натуральных чисел: $y = n^2$;
1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2 .

Пример 3. Стационарная последовательность: $y = C$; $C, C, C, \dots, C, \dots$ Частный случай: $y = 5$; 5, 5, 5,

Пример 4. Последовательность $y = 2n$; 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 , ..., 2^n ,

Рекуррентный способ.

Указывается правило, позволяющее вычислить n -й элемент последовательности, если известны её предыдущие элементы.

Пример 1. Арифметическая прогрессия: $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$ где a и d - заданные числа, d - разность арифметической прогрессии. Пусть $a_1 = 5$, $d = 0,7$, тогда арифметическая прогрессия будет иметь вид: 5; 5,7; 6,4; 7,1; 7,8; 8,5;

Пример 2. Геометрическая прогрессия: $b_1 = b$, $b_{n+1} = b_n q$, где b и q - заданные числа, $b, q \neq 0$; q - знаменатель геометрической прогрессии. Пусть $b_1 = 23$, $q = 1/2$, тогда геометрическая прогрессия будет иметь вид: 23; 11,5; 5,75; 2,875;

Пример 3. Последовательность Фибоначчи. Эта последовательность легко задаётся рекуррентно: $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_{n+2} = y_n + y_{n+1}$ если $n = 3, 4, 5, 6, \dots$. Она будет иметь вид: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,

Аналитически последовательность Фибоначчи задать трудно, но возможно. Формула, по которой определяется любой элемент этой последовательности, выглядит так:

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Пример 1. Составить возможную формулу n -го элемента последовательности (y_n) :

а) 1, 3, 5, 7, 9, 11,

б) 4, 8, 12, 16, 20,

Решение.

а) Это последовательность нечётных чисел. Аналитически эту последовательность можно задать формулой $y = 2n + 1$.

б) Это числовая последовательность, у которой последующий элемент больше предыдущего на 4. Аналитически эту последовательность можно задать формулой $y = 4n$.

Пример 2. Выписать первые десять элементов последовательности, заданной рекуррентно:

$y_1=1, y_2=2, y_{n-2}+y_{n-1}$ если $n=3, 4, 5, 6, \dots$

Решение.

Каждый последующий элемент этой последовательности равен сумме двух предыдущих элементов.

$y_1=1; y_2=2; y_3=1+2=3; y_4=2+3=5; y_5=3+5=8; y_6=5+8=13; y_7=8+13=21; y_8=13+21=34; y_9=21+34=55; y_{10}=34+55=89.$

Пример 3. Последовательность (y_n) задана рекуррентно: $y_1=1, y_2=2, y_n=5y_{n-1}-6y_{n-2}$. Задать эту последовательность аналитически.

Решение.

Найдём несколько первых элементов последовательности.

$y_1=1; y_2=2; y_3=5y_2-6y_1=10-6=4; y_4=5y_3-6y_2=20-12=8; y_5=5y_4-6y_3=40-24=16;$

$y_6=5y_5-6y_4=80-48=32; y_7=5y_6-6y_5=160-96=64.$

Получаем последовательность: 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; которую можно представить в виде $2^0; 2^1; 2^2; 2^3; 2^4; 2^5; 2^6 \dots n=1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 \dots$

Анализируя последовательность, получаем следующую закономерность: $y = 2^{n-1}$.

Практическая часть:

1. Вычислите y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 и запишите в виде ряда чисел:

А) $y_n = 6n + 1$; б) $y_n = 6n^2 + 2n - 1$; в) $y_n = n^3 + 2$; г) $y_n = -(-1)^{2n-1}$; д) $y_n = \frac{(-1)^{n-1}}{3n + 2}$.

2. Составить возможную формулу n -го элемента последовательности (y_n) :

а) 1, 5, 9, 13,

б) 2, 6, 18, 54,

3. Выписать первые десять элементов последовательности, заданной рекуррентно: $y_1=1, y_2=3, y_{n-2}+y_{n-1}$ если $n=3, 4, 5, 6, \dots$

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться находить сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Числовая последовательность $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$, каждый член которой равен предыдущему, умноженному на постоянное для этой последовательности число q , называется **геометрической прогрессией**, число q называется знаменателем прогрессии.

Если знаменатель $q < 1$, то такая последовательность называется **бесконечно убывающей геометрической прогрессией**.

Суммой бесконечно убывающей прогрессии является число, к которому неограниченно приближается сумма первых n членов убывающей прогрессии при стремлении числа n к бесконечности. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии вычисляется по формуле:

$$S_n = \frac{b_1}{1 - q}$$

ПРИМЕР 1

Задание Найти сумму бесконечной геометрической прогрессии $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$

Решение Данная последовательность чисел будет бесконечной убывающей прогрессией, так как

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{3} < 1$$

Сумму данной бесконечной убывающей геометрической прогрессии вычислим по формуле:

$$S_n = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Ответ $S_n = \frac{3}{2}$

Практическая часть:

1 Выяснить, является ли геометрической прогрессией последовательность, заданная формулой n -го члена:

$$b_n = -5^{2n}.$$

2 Найти сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, если:

$$b_1 = 11, b_4 = 88.$$

3 Доказать, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей:

$$1) \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots; \quad 2) -64, -32, -16, \dots$$

4 Выяснить, является ли геометрическая прогрессия бесконечно убывающей, если:

$$1) b_7 = 12, b_{11} = \frac{3}{4}; \quad 2) b_5 = 9, b_{10} = -\frac{1}{27}.$$

5. Найти сумму бесконечной геометрической прогрессии $\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}; \dots$

6. Представить в виде обыкновенной дроби число $0,0(3)$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Правила дифференцирования

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение использовать правила дифференцирования при нахождении производных различных функций.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Правила дифференцирования	
$(u + v)' = u' + v'$	
$(u - v)' = u' - v'$	
$(u \cdot v)' = u'v + v'u$	u, v, f - функции c - константа
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	
$(c \cdot f)' = c \cdot f'$	

Производная сложной функции:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Практическая часть:

Вариант I

1. Запишите правило дифференцирования суммы
2. Запишите правило дифференцирования произведения
3. Запишите правило дифференцирования частного

Найдите производную функции:

4. $y = kx + c$
5. $y = x^n$
6. $y = x^{-6}$
7. $y = (6 - 7x)^3$
8. $y = x^4 + x$
9. $y = \frac{9}{x} - 12\sqrt{x}$
10. $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$
11. $y = (2x^3 + x)(5x^2 + 3)$
12. $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^3}$

Вариант II

- частного
- степенной функции
- произведения

- $y = c$
- $y = \sqrt{x}$
- $y = (kx + c)^n$
- $y = 16 + 8x$
- $y = x - x^3$
- $y = 4\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x}$
- $y = x^{-4}$
- $y = (x^2 - 2x)(3x^2 - 1)$
- $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^4}$

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Уравнение касательной

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться находить уравнение касательной в точке.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Уравнение касательной. Выведем уравнение касательной к графику функции в точке $A(x_0, f(x_0))$. В общем случае уравнение прямой с угловым коэффициентом $f'(x_0)$ имеет вид:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b.$$

Чтобы найти b , воспользуемся тем, что касательная проходит через точку A :

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b,$$

отсюда, $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$, и подставляя это выражение вместо b , мы получим уравнение касательной:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Таблица производных

$f(x)$ (функция)	$f'(x)$ (производная)
C (константа)	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Правила дифференцирования

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u - v)' = u' - v'$$

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u$$

u, v, f - функции

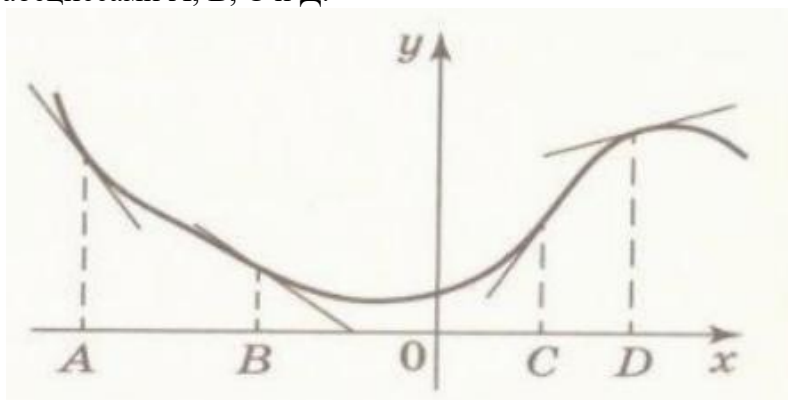
c - константа

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

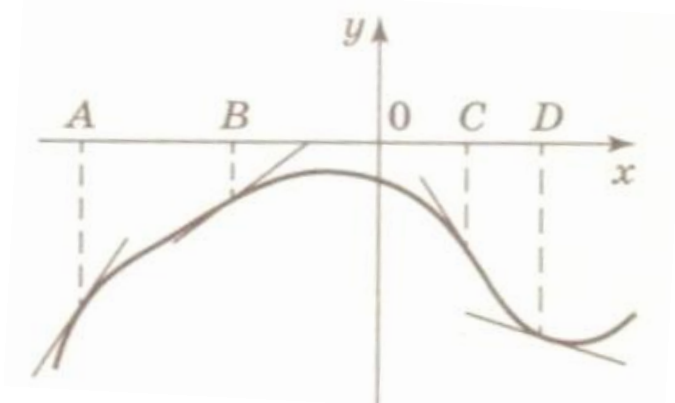
$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

Практическая часть:

1. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ в точке с абсциссой 2.
2. На рисунке изображены график функции и касательные, проведенные к нему в точках с абсциссами А, В, С и Д.



- А) Определите по графику, какого знака производная в точке А: 1. отрицательная; 2. Нуль; 3. Положительная.
 - Б) Определите по графику, какого знака производная в точке В: 1. отрицательная; 2. Нуль; 3. Положительная.
 - В) Определите по графику, какого знака производная в точке С: 1. отрицательная; 2. Нуль; 3. Положительная.
 - Г) Определите по графику, какого знака производная в точке Д: 1. отрицательная; 2. Нуль; 3. Положительная.
3. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательные, проведенные к нему в точках с абсциссами А, В, С и Д.



Ответьте на вопросы:

- А) В каких точках угловые коэффициенты касательных положительны? 1. А; 2. В; 3. С; 4. Д?
Б) В каких точках угловые коэффициенты касательных отрицательны: 1. А; 2. В; 3. С; 4. Д?
В) В какой точке угловой коэффициент касательной больше: 1. А; 2. В?
Г) В какой точке угловой коэффициент касательной меньше: 1. С; 2. Д?
Д) В какой точке угловой коэффициент касательной больше 1: 1. А; 2. В; 3. С; 4. Д?
Е) В какой точке угловой коэффициент касательной меньше -1: 1. А; 2. В; 3. С; 4. Д?
Ж) В какой точке угловой коэффициент касательной наибольший: 1. А; 2. В; 3. С; 4. Д?
З) В какой точке угловой коэффициент касательной наименьший: 1. А; 2. В; 3. С; 4. Д?

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Производные некоторых элементарных функций

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение находить производные некоторых элементарных функций.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Таблица производных

$f(x)$ (функция)	$f'(x)$ (производная)
C (константа)	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Практическая часть:

Найти производные функций:

- 1** 1) $\sin 5x + \cos (2x - 3)$; 2) $e^{2x} - \ln 3x$;
3) $\sin (x - 3) - \ln (1 - 2x)$; 4) $6 \sin \frac{2x}{3} - e^{1-3x}$.
- 2** 1) $x^2 \cos x$; 2) $x^3 \ln x$; 3) $5xe^x$;
4) $x \sin 2x$; 5) $e^{-x} \sin x$; 6) $e^x \cos x$.
- 3** 1) $\frac{x^3+1}{x^2+1}$; 2) $\frac{x^2}{x^3+1}$; 3) $\frac{\sin x}{x+1}$; 4) $\frac{\ln x}{1-x}$.
- 4** 1) $\sin^3 x$; 2) $8^{\cos x}$; 3) $\cos^4 x$; 4) $\ln (x^3)$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретического части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Производная: механический и геометрический смысл производной

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться решать задачи с применением механического и геометрического смысла производной.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Производная (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке). Определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке).

Производная. Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$ в двух точках x_0 и $x_0 + \Delta x$: $f(x_0)$ и $f(x_0 + \Delta x)$. Здесь через Δx обозначено некоторое малое изменение аргумента, называемое *приращением аргумента*; соответственно разность между двумя значениями функции: $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется *приращением функции*. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если этот предел существует, то функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0 . Производная функции $f(x)$ обозначается так:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

Геометрический смысл производной. Рассмотрим график функции $y = f(x)$:

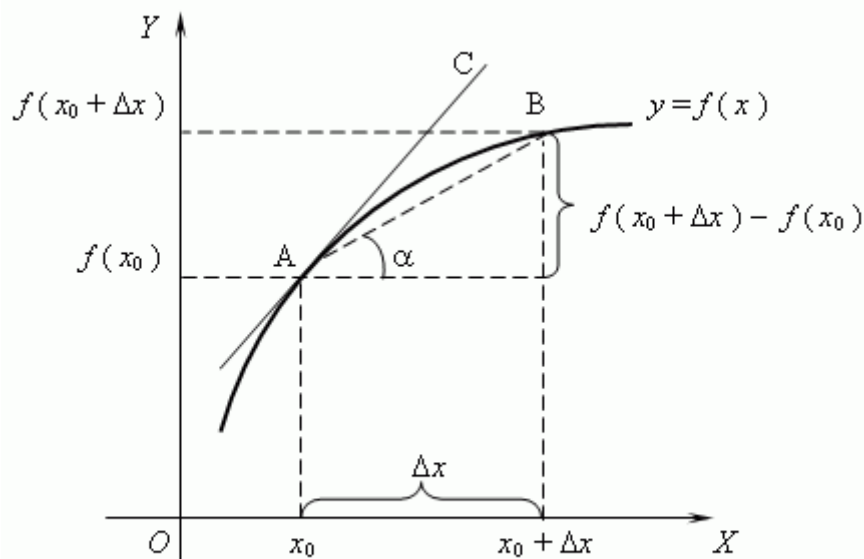


Рис. 1

Из рис.1 видно, что для любых двух точек A и B графика функции:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \tan \alpha,$$

где α - угол наклона секущей AB.

Таким образом, разностное отношение равно угловому коэффициенту секущей. Если зафиксировать точку А и двигать по направлению к ней точку В, то Δx неограниченно уменьшается и приближается к 0, а секущая АВ приближается к касательной АС. Следовательно, предел разностного отношения равен угловому коэффициенту касательной в точке А. Отсюда следует: *производная функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в этой точке.* Этим и состоит геометрический смысл производной.

Механический смысл производной. Рассмотрим простейший случай: движение материальной точки вдоль координатной оси, причём закон движения задан: координата x движущейся точки – известная функция $x(t)$ времени t . В течение интервала времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ точка перемещается на расстояние: $x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = \Delta x$, а её *средняя скорость* равна: $v_a = \Delta x / \Delta t$. При $\Delta t \rightarrow 0$ значение средней скорости стремится к определённой величине, которая называется *мгновенной скоростью* $v(t_0)$ материальной точки в момент времени t_0 . Но по определению производной мы имеем:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = x'(t_0),$$

отсюда, $v(t_0) = x'(t_0)$, т.е. *скорость – это производная координаты по времени.* В этом и состоит *механический смысл* производной. Аналогично, *ускорение – это производная скорости по времени:* $a = v'(t)$.

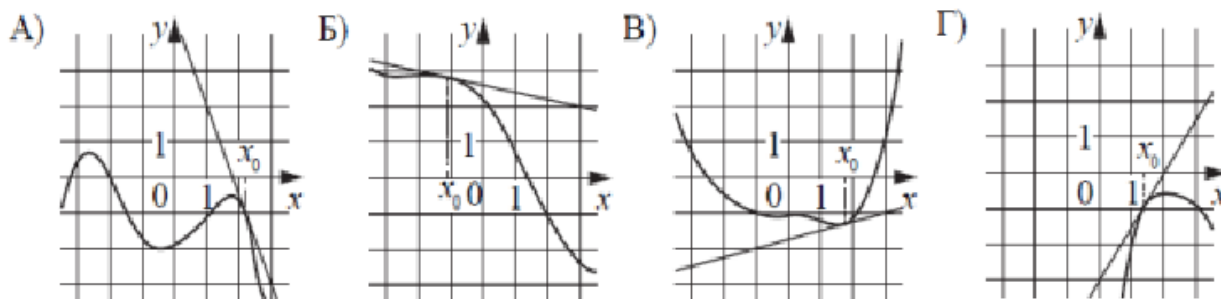
Практическая часть:

1. На рисунках изображены графики функций и касательные, проведенные к ним в точках с абсциссами x_0 . Установите соответствие между графиками функций и значениями производной этих в точках x_0 .

Значения производных:

1. -0,2 2) -2,5 3) 1,5 4) 0,25

ГРАФИКИ



В ответе запишите четырехзначное число.

2. Найти угол наклона касательной к кривой: $y = x^2 - x + 6$ в точке $x_0 = 1$.

3. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 3x^3 - 1$ в точке $x_0 = 2$.

4. Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = t^4 - 2t^2 + t - 5$. Найти мгновенную скорость и ускорение в момент времени $t = 3$ с.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Экстремумы функций

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение находить экстремумы функции и промежутки монотонности функции

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Производная широко используется для исследования функций, т. е. для изучения различных свойств функций. Например, с помощью производной можно находить промежутки возрастания и убывания функции, её наибольшие и наименьшие значения.

Рассмотрим применение производной к нахождению промежутков возрастания и убывания функций.

Итак, если $f'(x) > 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ возрастает на этом промежутке. Если $f'(x) < 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ убывает на этом промежутке.

Промежутки возрастания и убывания функции часто называют промежутками монотонности этой функции.

Алгоритм нахождения точек экстремума функции.

1. Найдем производную функции.
2. Решив уравнение $f'(x) = 0$, найдем стационарные точки функции.
3. Методом интервалов устанавливаем промежутки знакопостоянства функции.
4. Если при переходе через точку x_0 :
 - производная не меняет знак, то x_0 - точка перегиба;
 - производная меняет знак с «+» на «-», то x_0 - точка максимума.
 - производная меняет знак с «-» на «+», то x_0 - точка минимума.
5. Выписываем промежутки возрастания и убывания функции.

Пример: Найти точки экстремумов и промежутки монотонности функции: $y = \frac{2}{x} + 3x$.

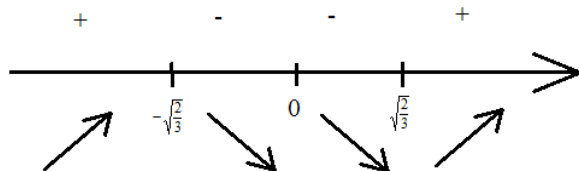
Решение: 1. Найдем производную функции.

$$y' = -\frac{2}{x^2} + 3 = \frac{3x^2 - 2}{x^2} = \frac{3(x^2 - \frac{2}{3})}{x^2} = \frac{3(x - \sqrt{\frac{2}{3}})(x + \sqrt{\frac{2}{3}})}{x^2}$$

2. Решив уравнение $\frac{3(x - \sqrt{\frac{2}{3}})(x + \sqrt{\frac{2}{3}})}{x^2} = 0$, найдем стационарные точки функции.

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

3. Методом интервалов устанавливаем промежутки знакопостоянства функции.



4. $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ - точка максимума, $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ - точка минимума.

Функция возрастает при $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty\right)$, функция убывает при $x \in \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Практическая часть:

Найти точки экстремумов и промежутки монотонности функции:

1 1) $y = 2 + 5x^3 - 3x^5$; 2) $y = \frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{6}x^3 + 2x$.

2 1) $y = 3x + \frac{1}{3x}$; 2) $y = \frac{4}{x} - x$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Исследование функции с помощью производной

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться исследовать функцию с применением производной по схеме.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Схема исследования.

1. Находим **область определения** $D(f)$ функции $y = f(x)$.

2. Проверяем функцию на **чётность**.

Если $f(-x) = f(x)$, то функция **чётная**, график функции симметричен относительно оси ОУ.

Если $f(-x) = -f(x)$, то функция **нечётная**, график нечётной функции симметричен относительно начала координат.

В противном случае функция является ни чётной, ни нечётной.

3. Если функция **периодическая**, то находим период функции.

4. Находим **точки пересечения графика с осями координат**.

Находим **нули функции** - это **точки пересечения графика функции с осью абсцисс (Оx)**.

Для этого мы решаем уравнение $f(x) = 0$.

Находим **точку пересечения графика функции с осью ординат (Оy)**. Для этого ищем **значение функции** при $x=0$.

5. Находим **промежутки знакопостоянства функции**, то есть промежутки, на которых функция сохраняет знак. Это нам потребуется для контроля правильности построения графика.

Чтобы найти промежутки знакопостоянства функции, нам нужно решить неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

6. Исследуем функцию с помощью производной: находим **промежутки возрастания и убывания** функции, а также **точки максимума и минимума**.

Для этого мы следуем привычному алгоритму.

а) Находим производную

б) Приравняем производную к нулю и находим корни уравнения - это стационарные точки.

в) Находим промежутки знакопостоянства производной. Промежутки, на которых **производная положительна**, являются **промежутками возрастания функции**.

Промежутки, на которых **производная отрицательна**, являются **промежутками убывания функции**.

Точки, в которых **производная меняет знак с плюса на минус**, являются **точками максимума**.

Точки, в которых **производная меняет знак с минуса на плюс**, являются **точками минимума**.

7. Найти **значения функции в точках экстремума**.

8. По данным исследования **построить график функции**.

Пример 1. Исследовать функцию и по результатам исследования построить график.

$$f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$$

Решение

1) $D(f): \mathbb{R}$

2) Проверим функцию на чётность/нечётность:

$$f(-x) = (-x)^3 - \frac{5}{2} \cdot (-x)^2 - 2 \cdot (-x) + \frac{3}{2} = -x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$$

$f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, значит, данная функция не является чётной или нечётной.

3) Функция неперiodическая.

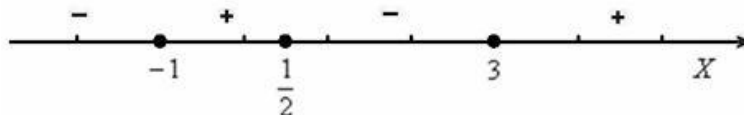
4) Нули функции.

$$y = f(0) = 0^3 - \frac{5}{2} \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

С осью Oy :

Чтобы найти точки пересечения с осью Ox (нули функции) требуется решить уравнение $f(x)=0$:

$$x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0 \quad (x+1) \cdot \left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}\right) = 0 \quad x = -1, x = \frac{1}{2}, x = 3$$



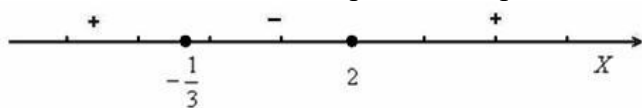
5) Таким образом, на интервалах $(-\infty; -1) \cup (1/2; 3)$ график расположен ниже оси абсцисс $f(x) < 0$, а на интервалах $(-1; 1/2) \cup (3; +\infty)$ – выше данной оси $f(x) > 0$.

6) Возрастание, убывание.

Найдём критические точки:

$$f'(x) = \left(x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right)' = 3x^2 - 5x - 2 = 0 \quad x = -\frac{1}{3}, x = 2$$

Отложим их на числовой прямой и определим знаки производной:



1

Следовательно, функция возрастает на $(-\infty; -1/3) \cup (2; +\infty)$ и убывает на $(-1/3; 2)$.

7). Экстремумы функции точка максимума, так как при переходе через нее производная меняет знак с «+» на «-»

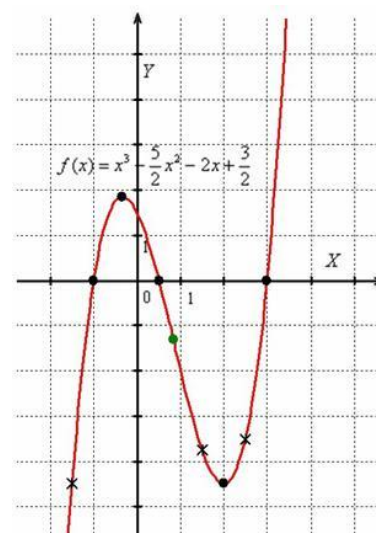
$x = 2$ точка минимума, так как при переходе через нее производная меняет знак с «-» на «+».

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} - \frac{5}{18} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{50}{27} \approx 1,85$$

8).

$$f(2) = 8 - 10 - 4 + \frac{3}{2} = -\frac{9}{2} = -4\frac{1}{2}$$

9) Строим график функции.



Практическая часть:

1. Исследовать функцию $y = x^3 + x^2 - x - 1$ и построить ее график.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Выпуклость графика функции, точки перегиба

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение находить точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости функции.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

1. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на некотором интервале несколько раз. Производная n -го порядка:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Например, дана функция $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4x^2$.

Производная первого порядка или первая производная:

$$f'(x) = 5x^4 + 0x^2 - 8x.$$

Производная второго порядка или вторая производная:

$$f''(x) = 20x^3 + 18x - 8.$$

Производная третьего порядка или третья производная:

$$f'''(x) = 60x^2 + 18.$$

Производная четвертого порядка или четвертая производная:

$$f^{IV}(x) = 120x.$$

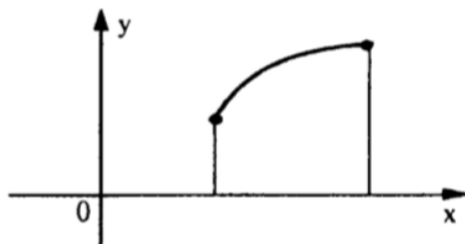
Производная пятого порядка или пятая производная:

$$f^V(x) = 120.$$

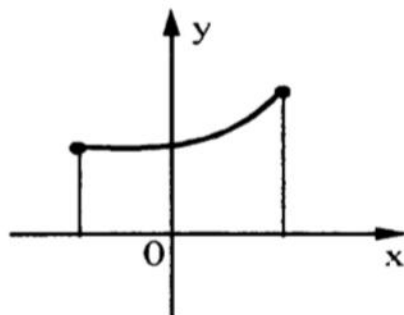
Производная шестого и далее порядка:

$$f^{VI}(x) = 0.$$

2. Если $f''(x) < 0$ на некотором интервале, то функция называется **выпуклой вверх** на этом интервале.

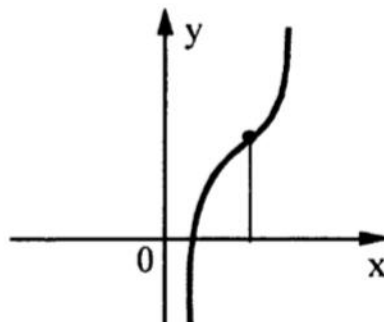


Если $f''(x) > 0$ на некотором интервале, то функция называется **выпуклой вниз** на этом интервале.



3. В **точке перегиба** x_0 дифференцируемая функция меняет направление выпуклости.

Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $(a; b)$ вторую производную. Тогда если $f''(x)$ меняет знак при переходе через x_0 , где $x_0 \in (a; b)$, то x_0 – точка перегиба функции $f(x)$.



Пример: точки перегиба и промежутки вогнутости и выпуклости функции: $y = 2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{5}x^5$

Решение: 1. Найдем вторую производную функции.

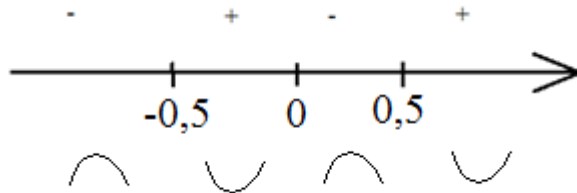
$$y' = \frac{1}{2}x^2 - x^4, \quad y'' = x - 4x^3$$

2. Решив уравнение $x - 4x^3 = 0$, найдем точки перегиба.

$$x(1 - 4x^2) = 0 \Rightarrow x(1 - 2x)(1 + 2x) = 0$$

$$x_{1,2} = \pm 0,5; x_3 = 0$$

3. Методом интервалов устанавливаем промежутки знакопостоянства функции.



4. $x = \pm 0,5$ - точки выпуклости, $x = 0$ - точка вогнутости.

Функция выпукла при $x \in (-\infty; -0,5) \cup (0; 0,5)$, функция вогнута при $x \in (-0,5; 0) \cup (0,5; +\infty)$.

Практическая часть:

Найти точки перегиба и промежутки вогнутости и выпуклости функции:

- | | |
|---------------------------|---|
| 1) $y = 2 + 5x^3 - 3x^5;$ | 2) $y = 3x^5 - 5x^3;$ |
| 3) $y = 4x^5 - 5x^4;$ | 4) $y = \frac{1}{10}x^5 - \frac{5}{6}x^3 + 2x.$ |

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Нахождение наибольшего, наименьшего значения и экстремальных значений функции

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться находить наибольшее и наименьшее значения функции и экстремальные значения функции.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке:

- 1) Найти все критические точки функции, принадлежащие отрезку $[a, b]$;
- 2) Вычислить значения функции в этих точках и на концах отрезка (экстремальных значений функции);
- 3) Из полученных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^2 - 2x + \frac{16}{x-1} - 13$ на отрезке $[2; 5]$.

Решение. 1) Найдем критические точки функции.

$$f'(x) = 2x - 2 - \frac{16}{(x-1)^2}, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 - \frac{16}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x-1) - \frac{8}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^3 - 8}{(x-1)^2} = 0.$$

На отрезке $[2; 5]$ знаменатель не обращается в нуль. Следовательно, дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю:

$$(x-1)^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 = 8 \Leftrightarrow x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Значит, $x = 3$ – критическая точка функции. Она принадлежит данному отрезку.

Найдем значение функции в критической точке:

$$f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + \frac{16}{3-1} - 13 = 3 + 8 - 13 = -2.$$

2) Найдем значения функции на концах отрезка:

$$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + \frac{16}{2-1} - 13 = 3, \quad f(5) = 5^2 - 2 \cdot 5 + \frac{16}{5-1} - 13 = 15 + 4 - 13 = 6.$$

3) Из полученных значений выбираем наибольшее и наименьшее:

$$\min_{x \in [2; 5]} f(x) = f(3) = -2, \quad \max_{x \in [2; 5]} f(x) = f(5) = 6.$$

Практическая часть:

Найти наибольшее и наименьшее значение функции:

1. $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ на отрезке: а) $[0; 2]$; б) $[3; 6]$; в) $[-1; -3]$; г) $[2; 7]$;
2. $y = x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 1$ на отрезке: а) $[-1; 2]$; б) $[1; 6]$; в) $[-2; 3]$; г) $[-1; 7]$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

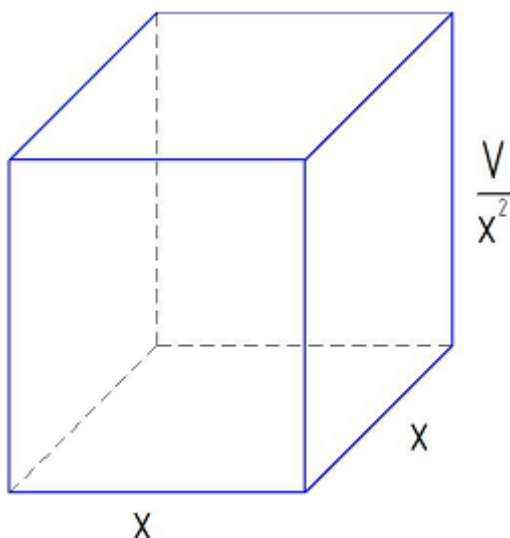
Практическая работа. Применение производной при решении задач на оптимизацию

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение применять производную при решении задач на оптимизацию.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Задача 1. Бак, имеющий вид прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, должен вмещать V литров жидкости. При какой стороне основания площадь поверхности бака (без крышки) будет наименьшей?



Решение. Составим математическую модель.

Оптимизируемая величина - площадь поверхности бака, поскольку в задаче требуется выяснить, когда эта площадь будет наименьшей. Обозначим оптимизируемую величину буквой S .

Площадь поверхности зависит от измерений прямоугольного параллелепипеда. Объявим независимой переменной сторону квадрата, служащего основанием бака; обозначим ее буквой x . Ясно, что $x > 0$. Других ограничений нет, значит, $0 < x < +\infty$. Таковы реальные границы изменения независимой переменной.

Если h - высота бака, то $V = x^2 h$, находим $h = \frac{V}{x^2}$.

На рисунке изображен прямоугольный параллелепипед, указаны его измерения. Поверхность бака состоит из квадрата со стороной x и четырех прямоугольников со сторонами x и h .

Значит, $S = x^2 + 4 \frac{V}{x^2} x = x^2 + \frac{4V}{x}$. $S = x^2 + \frac{4V}{x}, x \in (0; +\infty)$.

Математическая модель задачи составлена.

Работа с составленной моделью.

На этом этапе для функции $S = x^2 + \frac{4V}{x}, x \in (0; +\infty)$ надо найти $u_{\text{наим}}$. Для этого нужна производная функции.

$$S' = 2x - \frac{4V}{x^2}, S' = \frac{2(x^3 - 2V)}{x^2}$$

На промежутке $(0, +\infty)$ критических точек нет, а стационарная точка только одна: $S' = 0$ при $x = \sqrt[3]{2V}$.

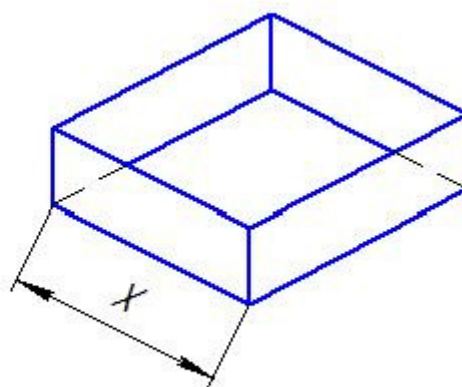
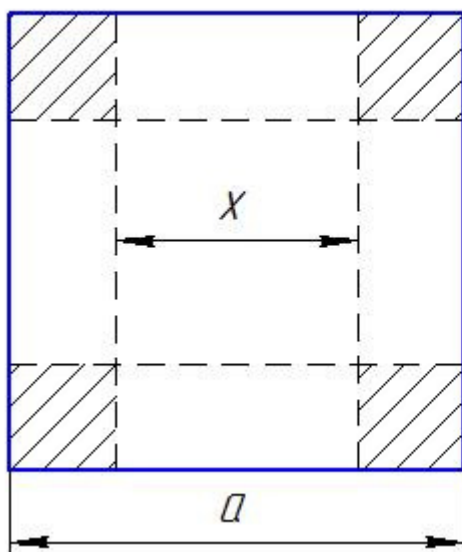
Заметим, что $x < \sqrt[3]{2V}$ при выполняется неравенство $S' < 0$, а при $x > \sqrt[3]{2V}$ выполняется неравенство $S' > 0$.

Значит, $x = \sqrt[3]{2V}$ - единственная точка экстремума функции на заданном промежутке, а поэтому в этой точке функция достигает своего наименьшего значения.

Ответ на вопрос задачи. В задаче спрашивается, какой должна быть сторона основания, чтобы бак имел наименьшую поверхность. Мы выяснили, что сторона квадрата, служащего основанием такого бака, равна $\sqrt[3]{2V}$.

Ответ: $\sqrt[3]{2V}$.

Задача 2. Имеется квадратный лист жести, сторона которого $a=60$ см. Вырезая по всем его углам равные квадраты и загибая оставшуюся часть, нужно изготовить коробку без крышки. Каковы должны быть размеры вырезаемых квадратов, чтобы коробка имела наибольший объем?



Решение. По условию, сторона квадрата $a = 60$. Обозначим сторону вырезаемых по углам квадратов через x . Дном коробки является квадрат со стороной $(a-2x)$, а высота коробки равна стороне x вырезаемого квадрата.

Следовательно, объем коробки выразится функцией $V = (a-2x)^2 x$.

Значение x , при котором функция примет наибольшее значение. Для этого сначала преобразуем функцию, а затем исследуем ее на экстремум:

$$V = (a^2 - 4ax + 4x^2)x;$$

$$V = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x;$$

$$V' = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0.$$

Очевидно, что значение $x = a/2$ не отвечает условию, так как в этом случае квадрат был бы разрезан на четыре равные части и никакой коробки не получилось бы. Поэтому исследуем функцию на экстремум в критической точке $x_2 = a/6$

$$V'' = 24x - 8a;$$

$$V''(a/6) = 4a - 8a = -4a < 0, \text{ т.е. при } x_2 = a/6 \text{ достигается максимум/}$$

Итак, сторона вырезаемого квадрата должна быть равна $x = a/6$.

В данном конкретном случае при $a = 60$ см получим $x = 10$ см.

Ответ: Размеры вырезаемых квадратов коробки равны 60 см, 10 см.

Практическая часть:

Задача 1. Требуется огородить сеткой длиной 600 м зону отдыха прямоугольной формы, прилегающую к реке. Определите, каковы должны быть длина и ширина участка, чтобы он имел наибольшую площадь.

Задача 2. Прямоугольный лист жести имеет длину 64 см и ширину 40 см. Из этого листа требуется изготовить открытую сверху коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Каковы должны быть стороны вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки была максимальной.

Задача 3. Определить размеры открытого бассейна объемом 256 м^3 , имеющего дно в виде квадрата, так чтобы на облицовку его стен и дна было израсходовано наименьшее количество материала.

Задача 4. Прилегающую к дому прямоугольную площадку нужно оградить решеткой длиной 120 м. Определить размеры площадки, так чтобы она имела наибольшую площадь.

Задача 5. Требуется сделать открытый цилиндрический резервуар вместимостью 300 м^3 воды. Стоимость материала, из которого делается дно резервуара, в два раза больше стоимости материала, идущего на боковые стенки резервуара. При каких размерах резервуара постройка его будет наиболее дешевой?

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.
4. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Практические задачи, приводящие к исследованию линейной функции

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решать практические задачи, приводящие к исследованию линейной функции.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Задача оптимального использования ресурсов.

Фирма выпускает два вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для изготовления мороженого используются два исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг мороженого и суточные запасы исходных продуктов даны в таблице.

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 кг мороженого		Запас, кг
	Сливочное	Шоколадное	
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,8	365

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более чем на 100 кг.

Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг в сутки. Отпускная цена 1 кг сливочного мороженого 16 ден. ед., шоколадного мороженого 14 ден. ед.

Требуется определить, какое количество мороженого каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Решение

Введем обозначения: x_1 — суточный объем выпуска сливочного мороженого, кг, x_2 — суточный объем выпуска шоколадного мороженого, кг.

Составим математическую модель задачи. Целевая функция будет иметь вид:

$L = 16x_1 + 14x_2 \rightarrow \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 \leq 400, \\ 0,4x_1 + 0,8x_2 \leq 365, \\ x_1 - x_2 \leq 100, \\ x_2 \leq 350, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решим задачу графическим методом.

1) Рассмотрим первое неравенство системы ограничений.

$$8/10 x_1 + 5/10 x_2 = 400.$$

Построим прямую: $8/10 x_1 + 5/10 x_2 = 400$.

$$\text{Пусть } x_1 = 0 \Rightarrow 5/10 x_2 = 400 \Rightarrow x_2 = 800.$$

$$\text{Пусть } x_2 = 0 \Rightarrow 8/10 x_1 = 400 \Rightarrow x_1 = 500.$$

Найдены координаты двух точек (0, 800) и (500, 0). Соединяем их и получаем прямую (1).

2) Рассмотрим второе неравенство системы ограничений. $4/10 x_1 + 8/10 x_2 = 365$.

$$\text{Построим прямую: } 4/10 x_1 + 8/10 x_2 = 365. \text{ Пусть } x_1 = 0 \Rightarrow 8/10 x_2 = 365 \Rightarrow x_2 = 1825/4.$$

$$\text{Пусть } x_2 = 0 \Rightarrow 4/10 x_1 = 365 \Rightarrow x_1 = 1825/2.$$

Найдены координаты двух точек (0, 1825/4) и (1825/2, 0). Соединяем их и получаем прямую (2).

3) Рассмотрим третье неравенство системы ограничений. $x_1 - x_2 = 100$.

$$\text{Построим прямую: } x_1 - x_2 = 100. \text{ Пусть } x_1 = 0 \Rightarrow -x_2 = 100 \Rightarrow x_2 = -100. \text{ Пусть } x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 100.$$

Найдены координаты двух точек (0, -100) и (100, 0). Соединяем их и получаем прямую (3).

4) Рассмотрим четвертое неравенство системы ограничений. $x_2 < 350$

Построим прямую: $x_2 = 350$.

Данная прямая параллельна оси OX_1 и проходит через точку $(0, 350)$, получаем прямую (4).

5) Находим общую область решений всех неравенств системы ограничений, получаем ОДР.

6) Строим вектор $C\{16; 14\}$, его координатами являются коэффициенты функции L . Линия уровня L имеет уравнение $16x_1 + 14x_2 = \text{const}$.

7) Перемещаем линию уровня по направлению вектора C . Точкой выхода линии уровня L из области допустимых решений является точка A . Функция L достигает наибольшего значения в точке A .

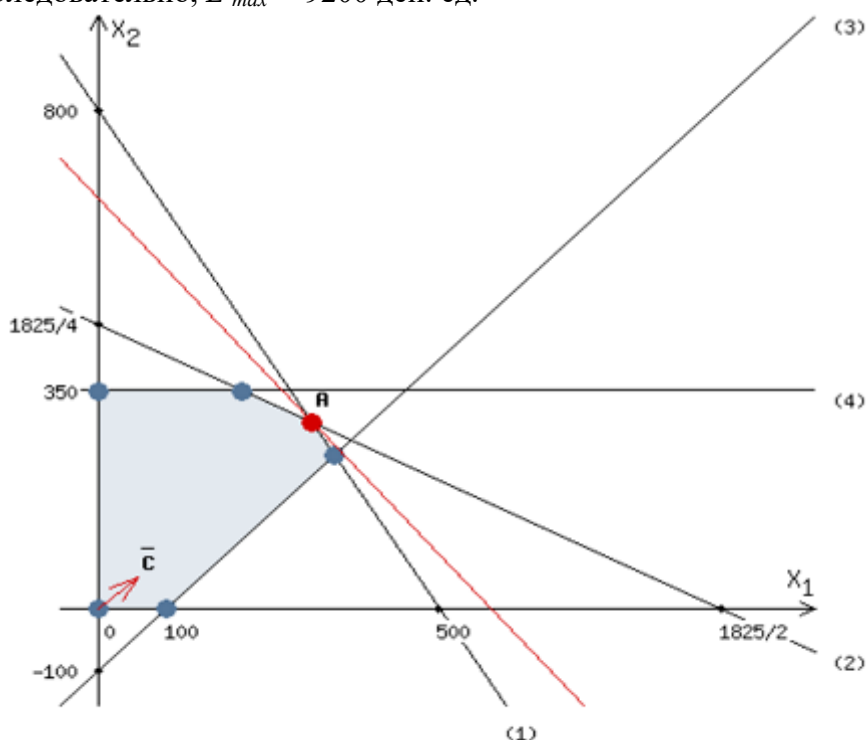
Точка A одновременно принадлежит прямым (1) и (2). Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 = 400, \\ 0,4x_1 + 0,8x_2 = 365. \end{cases}$$

Решая систему, получим координаты точки $A(312,5; 300)$, в которой и будет оптимальное решение, т. е. $x_1 = 312,5$; $x_2 = 300$.

$L(A) = 16 \cdot 312,5 + 14 \cdot 300 = 9200$ ден. ед.

Следовательно, $L_{\max} = 9200$ ден. ед.



Ответ. Максимальный доход от реализации составит 9200 ден. ед. при выпуске 312,5 кг сливочного и 300 кг шоколадного мороженого.

Практическая часть:

Задача 1. Оптимальный выбор рациона питания.

На ферме имеются корма для животных двух видов K_1 и K_2 , содержащие питательные вещества трех типов B_1 , B_2 , и B_3 . Содержание питательных веществ в 1 кг корма каждого вида и норма потребления в день питательных веществ каждого типа приведены в таблице.

Питательные вещества	Число единиц питательных веществ в 1 кг корма		Норма потребления питательных веществ в день
	K_1	K_2	
B_1	3	1	9
B_2	1	2	8
B_3	1	6	12

Стоимость 1 кг корма К1 равна 12 ден. ед., стоимость 1 кг корма К2 равна 18 ден. ед.

Необходимо составить дневной рацион питания животных, имеющий минимальную стоимость, и содержащий питательные вещества каждого типа не менее установленной нормы потребления.

Задача 2. Оптимальный состав инвестиций.

Собственные средства банка в сумме с депозитами составляют 100 млн руб. Эти средства банк может разместить в кредиты по ставке 16% годовых и в государственные ценные бумаги по ставке 12% годовых. При этом должны выполняться следующие условия:

- 1) Не менее 35% всех имеющихся средств необходимо разместить в кредитах.
- 2) Ценные бумаги должны составлять не менее 30% средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах.

Определить такое размещение средств в кредиты и ценные бумаги, при котором прибыль банка будет наибольшей.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.
4. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Использование свойства квадратичной функции при решении экстремальных задач

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение применять свойства квадратичной функции при решении экстремальных задач.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Задача 1. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 9$ с.

Решение.

Используем формулу $v(t) = x'(t)$.

$$v(t) = 12t - 48,$$

$$v(9) = 12 \cdot 9 - 48 = 60 \text{ м/с}$$

Ответ: 60 м/с.

Задача 2. Тело движется по закону $s = 18t + 9t^2 - t^3$. Найти его максимальную скорость.

Решение.

Используем формулу $v(t) = s'(t)$,

$$a(t) = v'(t).$$

$$v(t) = 18 + 18t - 3t^2,$$

$$a(t) = 18 - 6t.$$

При $a=0$ скорость будет максимальной.

$$18 - 6t = 0 \Rightarrow t = 3$$

$$v(3) = 18 + 18 \cdot 3 - 3 \cdot 3^2 = 45 \text{ м/с}$$

Ответ: $v_{\max} = v(3) = 45 \text{ м/с}$.

Практическая часть:

Задача 1. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 2t$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 6$ с.

Задача 2. Тело движется по закону $S = 3 + 9t^2 - t^3$. Найти его максимальную скорость.

Задача 3. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^4 + 6t^3 + 5t + 23$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени 3 с.

Задача 4. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 13t + 23$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

Задача 5. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.
4. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Раздел 9. Интеграл и его применение

Практическая работа. Правила нахождения первообразных

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: формировать умение находить первообразные используя таблицу первообразных.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Функция	Первообразная
$x^p, p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\frac{1}{x}, x > 0$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$(kx + b)^p, p \neq -1, k \neq 0$	$\frac{(kx + b)^{p+1}}{k(p+1)} + C$
$\frac{1}{kx + b}, k \neq 0$	$\frac{1}{k} \ln(kx + b) + C$
$e^{kx + b}, k \neq 0$	$\frac{1}{k} e^{kx + b} + C$
$\sin(kx + b), k \neq 0$	$-\frac{1}{k} \cos(kx + b) + C$
$\cos(kx + b), k \neq 0$	$\frac{1}{k} \sin(kx + b) + C$

Задача 1 Найти одну из первообразных функции

$$f(x) = x^2 + 3 \cos x.$$

- Используя правила интегрирования и таблицу первообразных для функций x^p при $p = 2$ и для $\cos x$, находим одну из первообразных данной функции:
 $F(x) = \frac{x^3}{3} + 3 \sin x. \triangleleft$

Задача 2 Найти все первообразные функции

$$e^{1-x} - 4 \sin(2x + 3).$$

- По таблице первообразных находим, что одной из первообразных функции e^{1-x} является функция $-e^{1-x}$, а одной из первообразных функции $\sin(2x + 3)$ является функция $-\frac{1}{2} \cos(2x + 3)$. По правилам интегрирования одна из первообразных данной функции: $-e^{1-x} + 2 \cos(2x + 3)$.
Ответ $-e^{1-x} + 2 \cos(2x + 3) + C. \triangleleft$

Практическая часть:

Часть 1

Для функции $f(x) = \cos 4x$ найти первообразную $F(x)$, если $F\left(\frac{\pi}{24}\right) = -1$.

Найти первообразную функции:

1) $y = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$; 2) $y = \frac{3}{4x-1}$.

3) $f(x) = 4x^3 + 6x^2$; 4) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$.

5) $y = -\frac{x^4}{4} + x^2$; 6) $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

7) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 9$; 8) $y = -x^4 + 6x^2 - 9$.

9) $y = \cos \frac{3x}{2}$; 10) $y = 2 \sin 0,6x$.

11) $y = \cos 3x$; 12) $y = \sin \frac{x}{5}$; 13) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$.

Часть 2

1. Найти первообразную функции

1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 2$; 2) $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 5$;

3) $y = \frac{3}{x} - 1$; 4) $y = \frac{2}{x-3}$.

5) $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1$; 6) $y = 4x^4 - 2x^2 + 3$;

7) $y = \frac{x}{3} - \frac{12}{x}$; 8) $y = \cos 2x + 2 \cos x$.

2. Найти первообразную функции $y = 2 \sin 5x + 3 \cos \frac{x}{2}$, которая при $x = \frac{\pi}{2}$ принимает значение, равное 0.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Теорема Ньютона—Лейбница

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: формировать умение находить значение определенного интеграла с помощью формулы Ньютона—Лейбница.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Основная формула интегрального исчисления – формула Ньютона-Лейбница.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$ на этом отрезке, то справедлива формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Правило вычисления определенного интеграла: определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ равен разности значений произвольной ее первообразной функции в концах a и b отрезка

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b, \quad \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b.$$

Рассмотрим пример:

$$\int_2^3 x^3 dx \quad a=2, b=3, f(x)=x^3, F(x)=\frac{x^3}{3}, F(2)=\frac{2^3}{3}=\frac{8}{3}; F(3)=\frac{3^3}{3}=9, S=9-\frac{8}{3}=6\frac{1}{3}$$

Практическая часть:

Найти значение определенного интеграла при помощи формулы Ньютона—Лейбница:

$$\begin{array}{lll} 1. \int_1^4 \sqrt{x} dx; & 2. \int_{-2}^3 2x dx; & 3. \int_0^1 (1-x) dx; \quad 4. \int_4^9 \sqrt{x} dx; \quad 5. \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 2x dx; \quad 6. \int_1^e \frac{dx}{x}. \\ 7. \int_{-3}^2 (2x-3) dx; & 8. \int_{-2}^{-1} (5-4x) dx; & 9. \int_{-1}^2 (1-3x^2) dx; \\ 10. \int_{-1}^1 (x^2+1) dx; & 11. \int_0^2 (3x^2-4x+5) dx; & 12. \int_0^4 (x-3\sqrt{x}) dx; \\ 13. \int_1^9 \left(2x - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx; & 14. \int_0^2 e^{3x} dx; & 15. \int_1^3 2e^{2x} dx. \end{array}$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Контрольные вопросы:

1. Можно ли интегрирование и производную считать взаимнообратными?
2. Если задан отрезок интегрирования $[a, b]$, то может ли a быть больше b ?

Практическая работа. Вычисление интегралов.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: формировать умение находить значение определенного интеграла с помощью формулы Ньютона—Лейбница.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Основная формула интегрального исчисления – формула Ньютона-Лейбница.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$ на этом отрезке, то справедлива формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Правило вычисления определенного интеграла: определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ равен разности значений произвольной ее первообразной функции в концах a и b отрезка

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b, \quad \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b.$$

Рассмотрим пример:

Практическая часть:

Найти значение определенного интеграла при помощи формулы Ньютона—Лейбница:

1) $\int_1^e \frac{1}{x} dx;$

2) $\int_0^{\ln 2} e^x dx;$

3) $\int_{-\pi}^{2\pi} \cos x dx;$

4) $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin x dx;$

5) $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin 2x dx;$

6) $\int_{-3\pi}^0 \cos 3x dx$

7) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx;$

8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx;$

9) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx;$

10) $\int_0^{\pi} (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретического части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

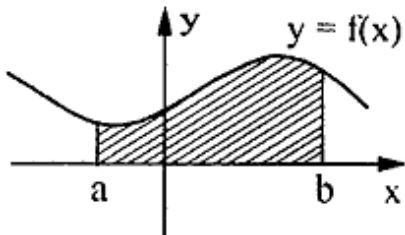
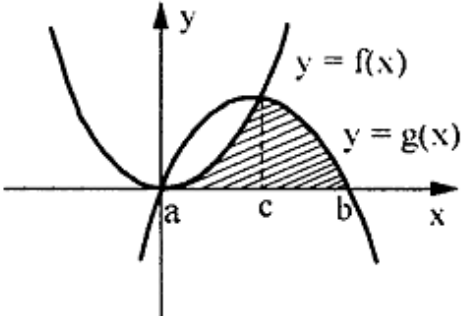
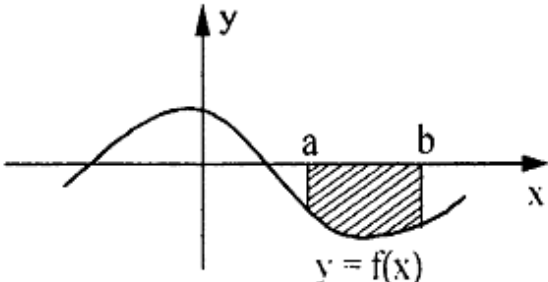
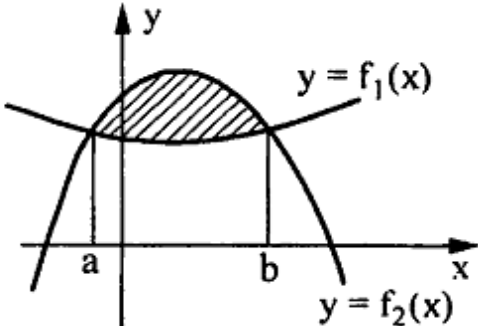
Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Применение интеграла к вычислению площадей

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение применять определенный интеграл к вычислению площадей плоских фигур.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

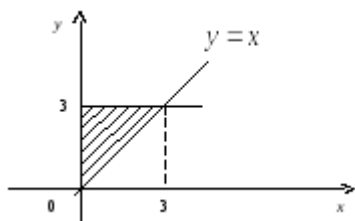
Теоретическая часть:

№ п.п.	Рисунок	Решение
1	2	3
1		$S = \int_a^b f(x) dx$
2		$S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b g(x) dx$
3		$S = \int_a^b (-f(x)) dx$
4		$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$

Пример 1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 3$, $x = 0$, $y = x$.

Решение

Изобразим данную плоскую фигуру (рисунок).



$$f_1(x) = x, f_2(x) = 3, a = 0, b = 3$$

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx$$

$$F_1(x) = \frac{x^2}{2}, F_1(0) = \frac{0^2}{2} = 0, F_1(3) = \frac{3^2}{2} = 4,5, S_1 = 4,5 - 0 = 4,5$$

$$F_2(x) = 3x, F_2(0) = 3 \cdot 0 = 0, F_2(3) = 3 \cdot 3 = 9, S_2 = 9 - 0 = 9$$

$$S = S_2 - S_1 = 9 - 4,5 = 4,5$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 3x$ и осью Ox .
Решение

$$f(x) = x^2 + 3x, x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -3 \Rightarrow a = 0, b = -3$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}, F(0) = \frac{0^3}{3} + \frac{3 \cdot 0^2}{2} = 0, F(x) = \frac{(-3)^3}{3} + \frac{3 \cdot (-3)^2}{2} = -9 + 13,5 = 4,5$$

$$S = 4,5 - 0 = 4,5$$

Практическая часть:

1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{2}x$, $y = 0$, $x = 2$.
2. Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями $y = x^2 - 4x + 3$ и осью Ox .
3. Параболой $y = -x^2 + 4x - 3$ и прямой, проходящей через точки $(1; 0)$ и $(0; -3)$;
 параболой $y = -x^2$ и прямой $y = -2$;
 параболками $y = 1 - x^2$ и $y = x^2 - 1$;

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.
4. Ответ на контрольные вопросы.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Контрольные вопросы

1. Как вычисляется площадь криволинейной трапеции?
2. Какие из заштрихованных фигур (см. таблицу по теории) являются криволинейными трапециями?
3. Почему другие фигуры нельзя назвать криволинейными трапециями? Как находится их площадь?

Раздел 10. Элементы теории вероятностей и математической статистики

Практическая работа. Комбинации событий. Противоположное событие

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение составлять комбинации событий и находить противоположное событие.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Пусть в определенном испытании могут произойти события A и B . Рассмотрим некоторые комбинации этих событий.

Определение 1. *Суммой (объединением) событий A и B называется событие, которое состоит в том, что происходит хотя бы одно из данных событий. Сумму событий A и B обозначают $A + B$ (или $A \cup B$).*

Допустим, испытание состоит в определении числа на верхней грани игрального кубика после одного броска, при этом событие A — выпало чётное число, событие B — выпало число, кратное трём. Тогда событие $A + B$ состоит в том, что на верхней грани кубика появится либо чётное, либо кратное трём (либо чётное, кратное трём) число, т. е. событие $A + B$ означает, что появится одно из чисел 2, 3, 4, 6.

Определение 2. *Произведением (пересечением) событий A и B называется событие, которое состоит в том, что происходят оба этих события. Произведение событий A и B обозначают AB (или $A \cap B$).*

Задача 1. Из колоды карт наугад вынимают одну карту и рассматривают два события: A — вынута карта пиковой масти, B — вынут король. Описать события $A + B$ и AB .

Ответ: Событие $A + B$ — вынута карта пиковой масти или вынут король; событие AB — из колоды вынут король пиковой масти.

Определение 3. *События A и B называют равными (равносильными) и пишут $A = B$, если событие A происходит тогда и только тогда, когда происходит событие B .*

Например, если в испытании с одним бросанием игрального кубика событие A — выпало число 6, а событие B — выпало наибольшее из возможных чисел, то $A = B$.

Рассмотрим события A и $\bar{A}$ (читается «ас чертой»), связанные с одним испытанием.

Определение 4. *Событие A называют противоположным событию A , если событие A происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A .*

Пусть A и B — произвольные события. Записать с помощью введённых обозначений следующие события:

- 1) A_1 — произошли оба события;
 - 2) A_2 — ни одно из двух событий A и B не произошло;
 - 3) A_3 — произошло только событие A ;
 - 4) A_4 — произошло по крайней мере одно из событий A и B ;
 - 5)* A_5 — произошло либо только событие A , либо только событие B .
- 1) $A_1 = AB$; 2) $A_2 = \bar{A}\bar{B}$;
3) $A_3 = A\bar{B}$; 4) $A_4 = A + B$;
5) $A_5 = A\bar{B} + \bar{A}B$. ◁

Практическая часть:

Упражнения

1. Записать событие, являющееся противоположным событию:

- 1) при одном броске монеты выпала решка;
- 2) в результате броска игральной кости выпало число, равное двум;
- 3) в результате броска игральной кости выпало число, большее четырёх;
- 4) в результате броска игральной кости выпало число, не большее трёх;

- 5) из колоды карт изъята карта бубновой масти;
 - 6) из колоды карт извлечена шестёрка;
 - 7) хотя бы одна пуля попала в цель в испытании с тремя выстрелами по мишени;
 - 8) хотя бы на одной из двух брошенных игральных костей появилось число 6;
 - 9) в расписании уроков на понедельник первым уроком поставлена физика;
 - 10) при сдаче экзамена студент получил оценку «отлично».
2. Пусть C и D — произвольные события. Записать следующие события:
- 1) произошли оба данных события;
 - 2) произошло только событие C ;
 - 3) произошло только событие D ;
 - 4) ни одно из данных событий не произошло;
 - 5) произошло, по крайней мере, одно из данных двух событий;
 - 6) произошло только одно из данных событий.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретического части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Сложение вероятностей

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решать прикладные задачи на сложение вероятностей.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Сумма событий A и B — это событие $A + B$, состоящее в наступлении либо только события A , либо только события B , либо и события A и события B одновременно. Например, если стрелок сделал 2 выстрела по мишени и событие A — попадание в мишень при первом выстреле, событие B — попадание при втором выстреле, то событие $A + B$ — это попадание стрелком в мишень хотя бы при одном из выстрелов.

Теорема 1. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е. $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Задача 1. В ящике лежат 9 шаров, из которых 2 белых, 3 красных и 4 зелёных. Наугад берётся один шар. Какова вероятность того, что этот шар цветной (не белый)?

I способ. Пусть событие A — появление красного шара, событие B — появление зелёного шара, тогда событие $A + B$ — появление цветного шара.

Очевидно, что $P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{4}{9}$. Так как события A и B несовместны, к ним применима теорема сложения вероятностей

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{4}{9}$$

II способ. Пусть событие C — появление белого шара, тогда противоположное ему событие $\bar{C}$ — появление не белого (цветного) шара. Очевидно,

что $P(C) = \frac{2}{9}$, а согласно следствию из теоремы

имеем

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

Практическая часть:

1. В коробке лежат 6 белых и 5 красных шаров. Наугад вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что среди них окажется по крайней мере один красный шар.
2. Известно, что среди 100 деталей 5 бракованных. Наугад выбирают 4 детали. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы одна не бракованная деталь.
3. В студенческой группе 24 человека, среди которых только 6 девушек. Случайным образом из числа всех студентов выбирают троих на профсоюзную конференцию. Найти вероятность того, что среди них окажется по крайней мере один юноша.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Статистическая вероятность

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение решать задачи на статистическое определение вероятности.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

*Определение 1. Относительной частотой события A в данной серии испытаний называют отношение числа испытаний M , в которых это событие произошло, к числу всех проведённых испытаний N . При этом число M называют **частотой** события A .*

Относительную частоту события A обозначают $W(A)$, поэтому по определению

$$W(A) = \frac{M}{N}.$$

Задача 1. Во время стрельбы по мишени было сделано 25 выстрелов и зарегистрировано 15 попаданий. Какова относительная частота попадания по мишени в данной серии выстрелов?

Событие A — попадание по мишени, произошло в 15 случаях, т. е. $M = 15$. Общее число испытаний (выстрелов) $N = 25$. По искомой формуле имеем

$$W(A) = \frac{M}{N} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Если проводить реальное испытание с подбрасыванием монеты и наблюдать за относительной частотой появления, например орла, в каждой серии испытаний, то можно заметить следующий факт: чем больше проводится испытаний, тем всё меньше относительная частота появления орла отличается от 0,5, т. е. от значения вероятности этого события в классическом понимании.

Этот факт подтверждают и дошедшие до нас исторические сведения.

Известно, что в XVIII в. французский естествоиспытатель Жорж Луи Леклерк де Бюффон (1707—1788) провёл 4040 испытаний с подбрасыванием монеты. В результате чего наблюдал появление орла 2048 раз. Таким образом, Бюффон получил относительную частоту появления орла, равную $2048/4040 \approx 0,5069$. В начале XX в. английский учёный Карл Пирсон (1857—1936) провёл с помощью своих учеников 24000 аналогичных испытаний и наблюдал 12012 появлений орла. Относительная частота события у Пирсона оказалась равной $12012/24000 \approx 0,5005$.

*Определение 2. **Статистической вероятностью** называют число, около которого колеблется относительная частота события при большом числе испытаний.*

Различные исследования с большим числом однотипных испытаний проводили учёные в разные годы. Наблюдая за уменьшением амплитуды колебания относительных частот события около некоторого числа при увеличении количества испытаний, швейцарский математик Якоб Бернулли (1654—1705) обосновал так называемый *закон больших чисел*:

Можно считать достоверным тот факт, что при любой достаточно большой серии испытаний относительная частота события A стремится к некоторому числу — вероятности этого события. Таким образом, $W(A) \approx p(A)$ при большом числе испытаний.

Практическая часть:

Упражнения.

1. В изготовленной партии из 10000 деталей обнаружено 220 бракованных деталей. Найти относительную частоту появления в данной партии бракованной детали. Результат выразить в процентах.
2. Проводились серии из N испытаний с подбрасыванием некоторой правильной треугольной призмы, сделанной из стали. Результаты заносились в таблицу:

Число испытаний (N)	10	50	100	300	500	1000
Частота падения призмы на любую боковую грань (M)	8	34	73	206	353	698
Относительная частота падения призмы на боковую грань (W)						

Заполнить последнюю строку таблицы, округляя результаты вычислений до сотых.

3. Заполнить последний столбец таблицы (с точностью до тысячных):

№ п/п	Испытание	Число испытаний (N)	Наблюдаемое событие	Частота события (M)	Относительная частота события $\left(W = \frac{M}{N}\right)$
1	Брошена монета	200	Выпала решка	98	
2	Брошен игральный кубик	300	Выпало число 4	53	
3	Спортсмен стреляет по мишени	100	Попадание по мишени	93	
4	Брошен игральный тетраэдр (с гранями, пронумерованными числами 1, 2, 3, 4)	200	Выпало число 3	49	

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Вычисление вероятностей. Прикладные задачи

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научить решать прикладные задачи.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

При решении данных задач необходимо использовать практические работы:

Практическая работа. Правило произведения. Перестановки.
Практическая работа. Размещения.
Практическая работа. Сочетания их свойства.

Практическая часть:

1. Среди 20 деталей, лежащих в ящике, 3 детали бракованные. Наугад вынимают 2 детали. Какова вероятность того, что: 1) обе детали оказались бракованными; 2) одна деталь бракованная, а другая нет; 3) обе детали не бракованные?
2. Среди 15 лампочек 4 испорчены. Наугад берут 2 лампочки. Какова вероятность того, что: 1) обе выбранные лампочки испорчены; 2) одна лампочка исправная, а одна — испорченная; 3) обе лампочки исправные?
3. В коробке лежат 5 белых и 7 чёрных шаров. Наугад вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что среди них окажется по крайней мере один: 1) белый шар; 2) чёрный шар.
4. Вероятность попадания по мишени при одном выстреле некоторым стрелком равна 0,8. Найти вероятность попадания по мишени этим стрелком: 1) в каждом из трёх выстрелов; 2) хотя бы одним из трёх выстрелов.
5. Имеются 3 партии деталей. Вероятность того, что вынутая из первой партии деталь окажется бракованной, равна 0,1. Вероятность того, что бракованной будет вынутая из второй партии деталь, равна 0,2. Вероятность того, что бракованной будет вынутая из третьей партии деталь, равна 0,3. Случайным образом из каждой партии изымают по одной детали. Найти вероятность того, что: 1) все 3 детали окажутся бракованными; 2) все 3 детали окажутся не бракованными; 3) хотя бы одна деталь окажется не бракованной; 4) хотя бы одна деталь окажется бракованной.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Данные, таблицы, графики.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: научиться вычислять относительные частоты, строить гистограмму и полигон относительных частот.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Статистика занимается сбором, представлением (в виде таблиц, диаграмм, графиков и др.) и анализом информации о различных случайных величинах.

Случайными величинами называют такие величины, которые в ходе наблюдений или испытаний U могут принимать различные значения. Можно говорить о том, что их значения зависят от случая.

Например, сумма чисел (очков), выпадающая при бросании двух игральных костей, — случайная величина. Обозначим её X , тогда $X_1 = 2$, $X_2 = 3$, $X_3 = 4$, $X_{11} = 12$ — значения этой случайной величины. В таблице 1 указаны суммы выпавших чисел, а в таблице 2 показано распределение значений случайной величины X (суммы выпавших чисел) по их вероятностям P : каждой из сумм X_1 , X_2 , X_3 , X_{11} поставлена в соответствие вероятность, с которой она может появиться в результате одного испытания (одного бросания двух игральных костей).

Имеются результаты 20 измерений диаметра d болта (в миллиметрах с точностью до ОД):

10,1; 10,0; 10,2; 10,1; 9,8; 9,9; 10,0;
10,0; 10,2; 10,0;
10,0; 9,9; 10,0; 10,1; 10,0; 9,9; 10,0;
10,1; 10,1; 10,0.

Представить эти данные с помощью: 1) таблиц распределения по частотам M и относительным частотам W ; 2) полигона частот.

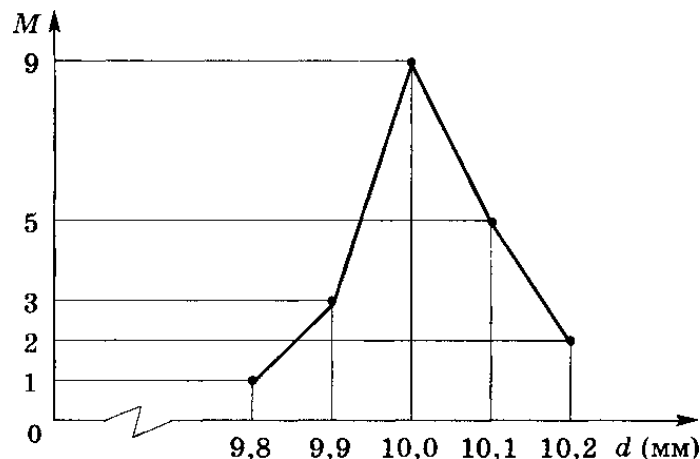
1) Имеющиеся данные (значения случайной величины d) представим в виде таблицы 3 распределения по частотам и относительным частотам:

Таблица 3

d	9,8	9,9	10,0	10,1	10,2
M	1	3	9	5	2
$W = \frac{M}{N}$	0,05	0,15	0,45	0,25	0,1

Отметим, что $\sum M = N = 20$, $\sum W = 1$.

2) На рисунке представлено распределение значений d в виде полигона частот.



Рассмотренные в этом параграфе случайные величины принимали изолированные друг от друга значения. Такие величины называют *дискретными* (от лат. *discretus* — раздельный, прерывистый).

Если случайная величина может принимать любое значение из некоторого промежутка, то такая величина называется *непрерывной*. Например, время T ожидания автобуса на остановке, когда пассажир приходит на остановку случайным образом, а автобусы ходят с интервалом 10 мин, есть непрерывная случайная величина, принимающая любое числовое значение $T \in [0; 10]$.

Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Однако существует способ, с помощью которого можно задать распределение и непрерывной случайной величины. Для этого промежуток значений величины разбивают на части (обычно — на равные) и считают частоты (или вероятности) попадания значений случайной величины в каждую из них. Рассмотрим пример. Пусть время горения T (в часах) электрической лампочки некоторого вида $T \in [0; 1000]$. Тогда промежуток $[0; 1000]$ можно разделить к примеру на 5 одинаковых по длине промежутков и результаты горения каждой из 100 экспериментальных лампочек занести в частотную таблицу 4:

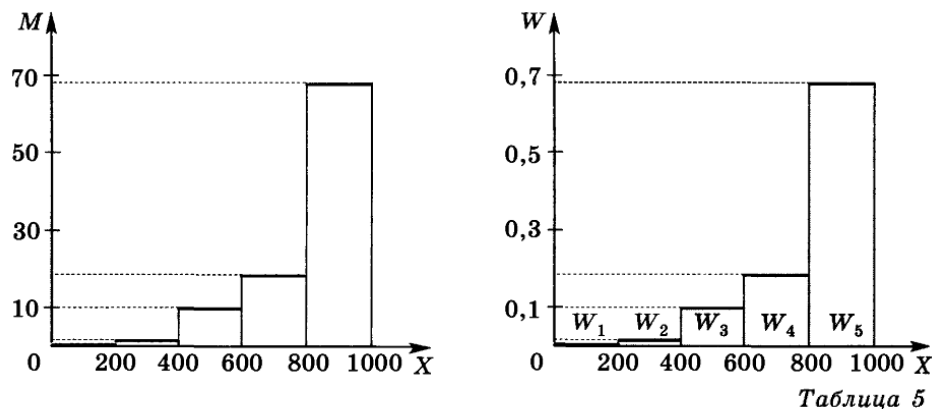
Таблица 4

T	[0; 200)	[200; 400)	[400; 600)	[600; 800)	[800; 1000]
M	1	3	10	18	68

Отметим, что $EM = N = 100$.

Данные этой таблицы можно представить с помощью так называемой *гистограммы частот* — ступенчатой фигуры (рис.).

Если основанием каждой ступени служит промежуток длиной h , то высоту столбца берут равной $\frac{M}{h}$, где M — частота значений величины X n на соответствующем промежутке. Тогда площадь такого столбца будет равна M , а площадь фигуры под гистограммой равна $EM = N$. Если по данным таблицы 4 заполнить таблицу 5 относительных частот, то построенную на её основе ступенчатую фигуру называют *гистограммой относительных частот* (рис.).



X	[0; 200)	[200; 400)	[400; 600)	[600; 800)	[800; 1000]
W	0,01	0,03	0,1	0,18	0,68

Гистограмму относительных частот строят обычно таким образом, чтобы площадь каждого столбца под ступенькой была равна соответствующему значению W . Тогда площадь фигуры под гистограммой будет равна единице ($\sum W = 1$). *

Практическая часть:

Задание 1.

Найти относительные частоты количества магазинов и средней зарплаты. Построить полигон средних значений интервалов и гистограмму по интервалам:

Таблица «Магазины города»

Количество работников	Количество магазинов	Средняя зарплата (тыс. руб)
1 - 10	83	17,5
11- 20	49	19,4
21 - 30	52	16,7
31 - 40	27	14,2
41 - 50	12	15,7
51 - 60	11	14,9

Задание 2

Вычислить среднее число жителей, проживающих в одной квартире многоквартирного дома и соответствующие отклонения. Построить гистограмму.

Количество, проживающих в квартире	Количество квартир
1	6
2	9
3	10
4	20
5	15

Задание 3

Дана таблица «Количество работников предприятия по стажу работы»

Стаж работы (лет)	Количество работников
0 - 5	13
5,1 – 10	17
10,1 - 15	23
15,1 - 20	28
20,1 - 25	19
25,1 - 30	14

Найти относительные частоты количества работников. Найти среднее значение величины. Построить полигон средних значений и гистограмму относительных частот.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Центральные тенденции

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение находить моду, медиану, среднее и математическое ожидание.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Совокупность данных иногда бывает полезно охарактеризовать одним числом — мерой центральной тенденции числовых значений её элементов. К таким характеристикам относятся **мода, медиана и среднее**.

Мода (обозначают M_o) — это значение случайной величины, имеющее наибольшую частоту в рассматриваемой выборке.

Например, мода выборки 7, 6, 2, 5, 6, 1 равна 6; выборка 2, 3, 8, 2, 8, 5 имеет две моды: $M_{o1} = 2$, $M_{o2} = 8$.

Медиана (обозначают M_e) — это число (значение случайной величины), разделяющее упорядоченную выборку на две равные по количеству данных части. Если в упорядоченной выборке нечётное количество данных, то медиана равна срединному из них. Если в упорядоченной выборке чётное количество данных, то медиана равна среднему арифметическому двух срединных чисел.

Пример. Найти медиану выборки значений случайной величины: 1) 5, 9, 1, 4, 5, -2, 0; 2) 7, 4, 2, 3, 6, 1.

Ответ: 1) 4; 2) 3,5.

Среднее (или **среднее арифметическое**) выборки — это число, равное отношению суммы всех чисел выборки к их количеству. Если рассматривается совокупность значений случайной величины X , то её среднее обозначают $\bar{X}$.

Найти среднее выборки значений случайной величины X , распределение которых по частотам представлено в таблице.

X	2	3	4	8	10
M	1	2	3	1	1

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 10 \cdot 1}{1 + 2 + 3 + 1 + 1} = \frac{2 + 6 + 12 + 8 + 10}{8} = \\ &= \frac{38}{8} = 4,75.\end{aligned}$$

Пусть задан закон распределения случайной величины.

X	X_1	X_2	X_3	X_4
P	P_1	P_2	P_3	P_4

Тогда математическое ожидание $M(X) = X_1 P_1 + X_2 P_2 + X_3 P_3 + X_4 P_4$.

Практическая часть:

Упражнения.

1. Найти моду выборки:

1) 18, 9, 5, 3, 7, 9, 1; 2) 6, 8, 5, 4, 8, 3, 6.

2. Найти медиану выборки:

1) 24, 15, 13, 20, 21; 2) 15, 6, 12, 8, 9, 14.

3. Найти среднее значение выборки:

1) 7, 16, -9, -2, 10; 2) 1,3, 1,4, 1,3, 0,9, 0,9, 1,4.

4. Найти среднее арифметическое выборки значений случайной величины X , распределение которых по частотам представлено в таблице:

1.

X	-1	2	3
M	4	5	2

2.

X	-3	2	3	4
M	4	3	2	1

5. Найти моду, медиану и среднее выборки значений случайной величины X :

X	-2	-1	0	1	2
M	1	3	2	4	1

6. Найти математическое ожидание значений случайной величины X, распределение которых по вероятностям представлено в таблице:

X	-1	0	1	2	3
M	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Числовые характеристики дискретной случайной величины

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умения вычислять числовые характеристики дискретной случайной величины.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Верна формула $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Математическое ожидание случайной величины X - это число, равное сумме произведений всех значений случайной величины x_i на соответствующие вероятности p_i

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i.$$

Математическое ожидание определяет среднее значение случайной величины.

Дисперсия случайной величины X - это число, равное математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$D(X) = M((X - M(X))^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 \cdot p_i$$

или

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - M^2(X).$$

Задача 1. Закон распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,1	0,2	p_4	p_5

Найти вероятности p_4 , p_5 и дисперсию $D(X)$, если математическое ожидание $M(X)=0,1$.

Решение: случайная величина X может принимать только пять значений, соответствующие события образуют полную группу, поэтому:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$$

$$0,2 + 0,1 + 0,2 + p_4 + p_5 = 1$$

$$p_4 + p_5 = 0,5$$

По определению математического ожидания:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5$$

$$0,1 = -2 \cdot 0,2 - 1 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,2 + p_4 + 2p_5$$

$$p_4 + 2p_5 = 0,6$$

Вероятности p_4 и p_5 найдем из решения системы:

$$\begin{cases} p_4 + p_5 = 0,5 \\ p_4 + 2p_5 = 0,6 \end{cases} \Rightarrow p_5 = 0,1$$

$$p_4 = 0,5 - p_5 = 0,5 - 0,1 = 0,4$$

Для нахождения дисперсии заполним вспомогательную расчетную таблицу:

x_i	-2	-1	0	1	2	Суммы:
p_i	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1	1
x_i^2	4	1	0	1	4	
$x_i^2 p_i$	0,8	0,1	0	0,4	0,4	1,7

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \sum x_i^2 p_i - (0,1)^2 = 1,7 - 0,01 = 1,69$$

Ответ: $p_4 = 0,4$, $p_5 = 0,1$, $D(X) = 1,69$

Практическая часть:

Задача 1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	-2	-1	3	8	9
p_i	4р	0,2	0,3	р	0,4

Найти дисперсию $D(X)$ и математическое ожидание $M(X)$.

Задача 2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x	x_i	-4	-2	x
p	p_i	0,3	0,5	p

Известно, что $M(X) = -1,8$. Найти: p , x , $D(X)$.

Задача 5. Найти $M(X)$, $D(X)$, если:

x_i	2	12	32	47	60
p_i	0,1	0,1	0,5	0,2	?

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Повторение

Практическая работа. Выражения и преобразования

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: повторить свойства арифметического корня и степени с действительным показателем при упрощении алгебраических выражений.

Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

Арифметическим корнем натуральной степени $n \geq 2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n -я степень которого равна a .

$$\sqrt[n]{a} = b$$

$$b^n = a, \text{ где } a \geq 0, b \geq 0.$$

Свойства арифметического корня n -й степени:

$$1) \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad 3) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m};$$

$$2) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \quad 4) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

где $a \geq 0, b > 0, m \geq 2, n \geq 2, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$.

$$5) \sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|, k \in \mathbb{N}; \quad 6) \sqrt[mk]{a^{nk}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Практическая часть:

1. Найдите значение выражения $\sqrt[6]{3^7 \cdot 4^5} \cdot \sqrt[6]{3^5 \cdot 4}$.

1) 24; 2) 36; 3) 6; 4) $4\sqrt{3}$.

2. Вычислите: $\frac{2}{3} : \sqrt{\frac{1}{0,09}} \cdot \frac{1}{\sqrt{25}}$.

1) 1,96; 2) 1,6; 3) 1,52; 4) 0,04.

3. Укажите значение выражения:

$$2\log_2 3 + \log_2 \frac{1}{3}.$$

1) $\log_2 3$; 2) $2\log_2 3$; 3) 0; 4) -2.

4. Вычислите значение выражения: $5^{\log_5 3} \cdot \log_2 8$.

1) 1; 2) 0,375; 3) 24; 4) 9.

5. Вычислите: $9^{-\frac{5}{2}} + 10 \cdot (4^0)^5 - (0,25)^{-\frac{3}{2}} - 9^{-\frac{3}{2}} \cdot 27 \cdot 3^{-5}$.

Задания с кратким ответом.

Найдите значение числового выражения:

1. $\sqrt{16 - \sqrt{31}} \cdot \sqrt{\sqrt{31} + 16}$.

2. $\left(\left(\frac{1}{9} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 49^{\frac{1}{2}} - 16^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{1}{125} \right)^{-\frac{1}{3}} \right)^{-1}$.

3. $12^{3 - \log_{12} 2}$.

4. $(\sqrt{5})^{2 + \log_{\sqrt{5}} 6}$.

5. $\log_{\sqrt{2}} \left(4 \cos \frac{\pi}{8} \right) + \log_{\sqrt{2}} \left(\sin \frac{\pi}{8} \right)$.

6. $25^{\frac{1}{2} \log_{\sqrt{5}} 4}$.

7. $(0,001)^{-\frac{1}{3}} + 27^{-2\frac{1}{3}} + (6^0)^5 \cdot 2 - 3^{-4} \cdot 81^{-\frac{3}{2}} \cdot 27$.

8. $64^{-\frac{5}{6}} - (0,125)^{-\frac{1}{3}} - 32 \cdot 2^{-4} \cdot 16^{-1\frac{1}{2}} + (3^0)^4 \cdot 4$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Практическая работа. Уравнения и неравенства

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: закрепить умение при решении показательных уравнений и неравенств.
Формируемые компетенции: ОК 1-9

Теоретическая часть:

1. **Показательное неравенство** - это неравенство, содержащее неизвестное в показателе степени.

2. Решение неравенств.

а) Решение показательных неравенств часто сводится к решению неравенства

$$a^x > a^b \text{ (} a^x < a^b \text{)}.$$

Если $a > 1$, то функция $y = a^x$ возрастает, и $x > b$ ($x < b$). Если $0 < a < 1$, то функция $y = a^x$ убывает, и $x < b$ ($x > b$).

б) Некоторые показательные неравенства заменой $a^x = t$ сводятся к квадратным неравенствам, которые решают, учитывая, что $t > 0$.

Практическая часть:

1. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения:

а) $3^{x-\frac{1}{2}} \cdot 3^{x+1} = 1$

1) $[-4; -2]$; 2) $(-2; -1)$; 3) $[-1; 0]$; 4) $(1; 2)$.

б) $4^{x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$

1) $(-4; -2)$; 2) $(1; 2)$; 3) $[2; 4]$; 4) $(4; 6)$.

в) $4^{x+1} - 2^{2x} = 24$

1) $(2; 4)$; 2) $[1; 2]$; 3) $(0; 1)$; 4) $[4; 6]$.

г) $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 39$

1) $[-2; 0]$; 2) $[2; 4]$; 3) $(4; 9]$; 4) $(0; 2)$.

2. Найдите сумму корней уравнения:

а) $49 \cdot 7^{2x} - 50 \cdot 7^x + 1 = 0$

1) 1; 2) 2; 3) -2; 4) 50.

б) $6^{x^2-2x} = 1$

1) -2; 2) 0; 3) 1; 4) 2.

3. Решить неравенство:

1) $3,3^{x^2+6x} < 1$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-x^2} > \frac{1}{2}$; 3) $8,4^{\frac{x-3}{x^2+6x+11}} < 1$;

4) $2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0$;

5) $3^{4-3x} - 35 \left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} + 6 \geq 0$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучение материала теоретической части.
2. Выполнение задания практической части.
3. Оформление вывода.

Содержание отчета: в результате выполнения работы в рабочей тетради должно быть выполнено задание и оформлен вывод.

Список используемой литературы

1. Алгебра и начала анализа. 10 -11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений с приложением на электронном носителе/[А.Н. Колмогоров, А.М.Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.]; под ред.А.Н. Колмогорова. – 20-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 384 с.: ил. – ISBN 978-5-09-025178-5.
2. Алгебра и начала анализа. 10 класс: поурочные планы по учебнику Л.С. Атанасяна и др./ авт.- сост. Т.Л. Афанасьева, Л.А. Тапилина. – Волгоград: Учитель, 2006. – 166 с.
3. Алгебра и начала анализа. 11 класс: поурочные планы по учебнику А.Н. Колмогорова и др./ авт.- сост. Т.Л. Афанасьева, Л.А. Тапилина. – Волгоград: Учитель, 2006. – 166 с.
4. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. и др. Алгебра и начала математического анализа. Базовый и углубленный уровни. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных организаций – М., 2016.
5. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия. Базовый и профильный уровни. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных организаций – М., 2016.
6. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа. Геометрия. (базовый и углубленный уровни). 10-11 классы. –М., 2013.
7. Башмаков М.И. Математика. Книга для преподавателей. –М.: Академия, 2014 – 220 с.
8. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений начального и среднего профессионального образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2015 – 256 с.
9. Башмаков М.И. Сборник задач профильной направленности: учеб. пособие для студ. учреждений среднего профессионального образования. –М., 2014.
10. Геометрия, 10 -11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый уровень/[А.В.Погорелов.].– 17-е изд. – М.: Просвещение, 2011
11. Геометрия. 10 класс: Поурочные планы.- Волгоград: Учитель, 2004.- 170 с.
12. Геометрия. 11 класс: Поурочные планы.- Волгоград: Учитель, 2004.- 170 с.
13. Математика: учебник / М.И. Башмаков. — 2-е изд., стер. — Москва: КНОРУС, 2024. — 400 с. — (Среднее профессиональное образование).
14. Математика. Практикум: учебно-практическое пособие маков, СБ. Энтина. - Москва: КНОРУС, 2024. - 296 с. профессиональное образование).
15. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы. Учебник для общеобразовательных организаций . В 2 ч. – М., 2020.
16. Смирнова И.М. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 класс. Учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровень). – М., 2020.
17. Смирнова И.М. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 11 класс. Учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровень). – М., 2019.